— Informatik I —
Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

Universität Zürich[UZH]

Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

- Zahlensysteme
- Zahlendarstellung

Rechnerarithmetik

- Rechnerarithmetik soll als Beispiel vorbereitet werden, wie größere Informationseinheiten verarbeitet werden.
- Hierzu werden zunächst die formalen Grundlagen erarbeitet.
- Dann werden Schaltnetze und –werke behandelt (Modul 3, 4).
- Danach werden Verfahren und Schaltungen zur Implementierung der vier Grundrechenarten in einem Rechner vorgestellt (Modul 5).
- Abschließend wird die Funktion einer arithmetisch logischen Einheit (ALU) eines Rechners besprochen (Modul 5).

Formale Grundlagen

- Menschen rechnen gewöhnlich im Dezimalzahlensystem.
- Rechner rechnen gewöhnlich im Dualzahlensystem.

→ Eine Konvertierung ist erforderlich

- Daneben werden weitere Zahlensysteme wie Oktalzahlensystem oder Hexadezimalzahlensystem (eigentlich: Sedezimal) zur kompakteren Darstellung der sehr langen Dualzahlen verwendet.

→ Es ist notwendig, die Zusammenhänge und mathematischen Grundlagen dieser Zahlensysteme zu verstehen.

Zahlensysteme (1)

- Gängigste Form: Stellenwertsysteme
- Zahlendarstellung in Form einer Reihe von Ziffern z_i, wobei das Dezimalkomma (-punkt) rechts von z_0 plaziert sei:

  $z_n\ z_{n-1}$ ..... $z_1\ z_0$, $z_{-1}\ z_{-2}$ ...z_{-m} z.B. 1234,567

- Jeder Position i der Ziffernreihe ist ein Stellenwert zugeordnet, der eine Potenz b^i der Basis b des Zahlensystems ist.
- Der Wert X_b der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n\, b^n + z_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + z_1\, b + z_0 + z_{-1}\, b^{-1} + \ldots + z_{-m}\, b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i\, b^i$$

Zahlensysteme (2)

- Interessante Zahlensysteme in der Informatik

b	Zahlensystem	Zahlenbezeichnung
2	Dualsystem	Dualzahl
8	Oktalsystem	Oktalzahl
10	Dezimalsystem	Dezimalzahl
16	Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)	Hexadezimalzahl (Sedezimalzahl)

- Hexadezimalsystem: Die „Ziffern“ 10 bis 15 werden mit den Buchstaben A bis F dargestellt.
- Dualsystem: Wichtigstes Zahlensystem im Rechner
- Oktal- und Hexadezimalsystem: Leicht ins Dualsystem umwandelbar, besser zu verstehen als lange 0-1-Kolonnen.

Der Euklidische Algorithmus

- Umwandlung vom Dezimalsystem in ein System zur Basis b
- 1. Methode: Euklidischer Algorithmus:

  $Z = z_n 10^n + z_{n-1} 10^{n-1} + ... + z_1 10 + z_0 + z_{-1} 10^{-1} + ... + z_{-m} 10^{-m}$

  $= y_p b^p + y_{p-1} b^{p-1} + ... + y_1 b + y_0 + y_{-1} b^{-1} + ... + y_{-q} b^{-q}$

  Die Ziffern werden sukzessive, beginnend mit der höchstwertigen Ziffer, berechnet.
- 1. Schritt: Berechne **p** gemäß der Ungleichung $\mathbf{b^p \le Z < b^{p+1}}$ (setze i = p)
- 2. Schritt: Ermittle $\mathbf{y_i}$ und den Rest $\mathbf{R_i}$ durch Division von $\mathbf{Z_i}$ durch $\mathbf{b^i}$: $\mathbf{y_i = Z_i \text{ div } b^i;}$ $\mathbf{R_i = Z_i \text{ mod } b^i;}$
- 3. Schritt: Wiederhole 2. Schritt für i = p-1, … und ersetze dabei nach jedem Schritt **Z** durch $\mathbf{R_i}$, bis $\mathbf{R_i = 0}$ oder bis $\mathbf{b^i}$ (und damit der Umrechnungsfehler) gering genug ist.

Beispiel

Umwandlung von $15741{,}233_{10}$ ins Hexadezimalsystem:

1. Schritt: $16^3 \le 15741{,}233 < 16^4$ ➔ höchste Potenz 16^3

2. Schritt:	$15741{,}233 : 16^3 = 3$	Rest 3453,233
3. Schritt:	$3453{,}233 : 16^2 = D$	Rest 125,233
4. Schritt:	$125{,}233 : 16 = 7$	Rest 13,233
5. Schritt:	$13{,}233 : 1 = D$	Rest 0,233
6. Schritt:	$0{,}233 : 16^{-1} = 3$	Rest 0,0455
7. Schritt:	$0{,}0455 : 16^{-2} = B$	Rest 0,00253
8. Schritt:	$0{,}00253 : 16^{-3} = A$	Rest 0,000088593
9. Schritt:	$0{,}000088593 : 16^{-4} = 5$	Rest 0,000012299 (→ Fehler)

➔ $\mathbf{15741{,}233_{10} \approx 3D7D{,}3BA5_{16}}$

Horner Schema

- Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis b
- 2. Methode: Abwandlung des Horner Schemas
- Hierbei müssen der ganzzahlige und der gebrochene Anteil getrennt betrachtet werden:
- Umwandlung des ganzzahligen Anteils:
- Eine ganze Zahl $X_b = \sum_{i=0}^{n} z_i b^i$ kann durch fortgesetztes Ausklammern auch in folgender Form geschrieben werden:

$$X_b = ((...(((y_n\ b + y_{n-1})\ b + y_{n-2})\ b + y_{n-3})\ b\ ...\ )\ b + y_1)\ b + y_0$$

Horner Schema: Beispiel

- Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis **b** dividiert.
- Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl $\mathbf{X_b}$ in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.

  Wandle 15741_{10} ins Hexadezimalsystem um:

$15741_{10} : 16 = 983$	Rest 13	(D_{16})
$983_{10} : 16 = 61$	Rest 7	(7_{16})
$61_{10} : 16 = 3$	Rest 13	(D_{16})
$3_{10} : 16 = 0$	Rest 3	(3_{16})

➔ **$15741_{10} = 3D7D_{16}$**

Umwandlung: Basis b → Dezimalsystem

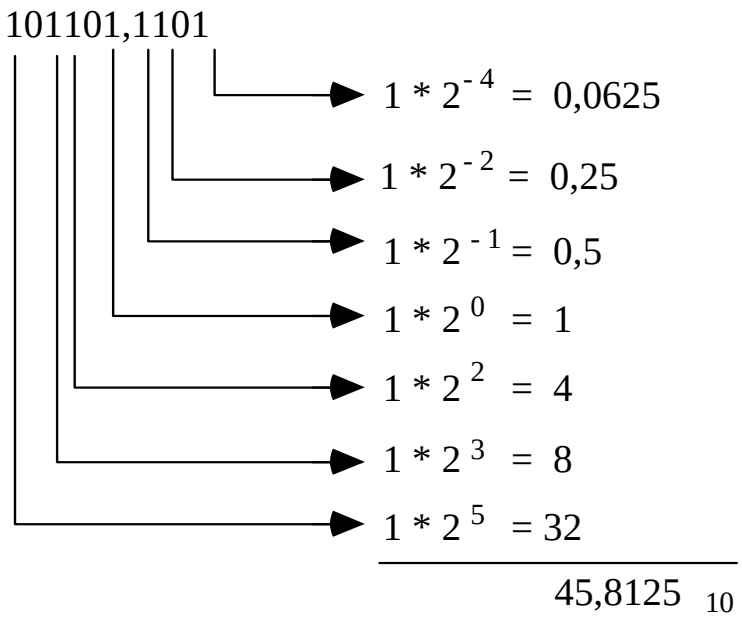
- Die Werte der einzelnen Stellen der umzuwandelnden Zahl werden in dem Zahlensystem, in das umgewandelt werden soll, dargestellt und nach der Stellenwertgleichung aufsummiert.

- Der Wert X_b der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_1 b + z_0 + z_{-1} b^{-1} + \ldots + z_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i$$

Beispiel

Konvertiere $101101{,}1101_2$ ins Dezimalsystem



Umwandlung beliebiger Stellenwertsysteme

- Man wandelt die Zahl ins Dezimalsystem um und führt danach mit Methode 1 oder 2 die Wandlung ins Zielsystem durch.
- Spezialfall:
  - Ist eine Basis eine Potenz der anderen Basis, können einfach mehrere Stellen zu einer Ziffer zusammengefasst werden oder eine Stelle kann durch eine Folge von Ziffern ersetzt werden.
- Wandlung von $0110100{,}110101_2$ ins Hexadezimalsystem
- $2^4 = 16 \Rightarrow$ 4 Dualstellen $\rightarrow$ 1 Hexadezimalstelle

dual

0110100,110101

↓

*00*110100,110101*00*

Ergänzen von Nullen zur Auffüllung auf Vierergruppen

hexadezimal 3 4 , D 4

Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

- Zahlensysteme
- Zahlendarstellung

Darstellung negativer Zahlen

- Für die Darstellung negativer Zahlen in Rechnern werden vier verschiedene Formate benutzt :
- Darstellung mit Betrag und Vorzeichen
- Stellenkomplement-Darstellung (Einerkomplement-Darstellung)
- Zweierkomplement-Darstellung
- Offset-Dual-Darstellung / Exzeß-Darstellung

Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

- Eine Stelle wird als Vorzeichenbit benutzt.
- Ist das am weitesten links stehende Bit (MSB, most significant bit):
  MSB = 0 ➔ positive Zahl
  MSB = 1 ➔ negative Zahl

Beispiel:

0001 0010 = +18
1001 0010 = -18

- Nachteile:
  - Bei Addition und Subtraktion müssen die Vorzeichen der Operanden gesondert betrachtet werden.
  - Es gibt zwei Repräsentationen der Zahl 0 (mit positivem und mit negativem Vorzeichen)

Stellenkomplement / Einerkomplement

- Stellenkomplement der entsprechenden positiven Zahl.
- Um eine Zahl zu negieren, wird jedes Bit der Zahl komplementiert.
- Dies entspricht dem Einerkomplement:

Komplementbildung

$z_{ek} = (2^n - 1) - z$

Bsp: $4 = 0100_2$ ➔ $-4 = 1011_{ek}$

$-4 = 2^4 - 1 - 4 = 11_{10} = 1011_2$

- Negative Zahlen sind wiederum durch ein gesetztes Bit in der ersten Stelle charakterisiert.
- Vorteil gegenüber der Darstellung mit Vorzeichenbit:
  - Erste Stelle bei Addition und Subtraktion muß nicht gesondert betrachtet werden.
  - Aber: Es gibt weiterhin zwei Darstellungen der Null

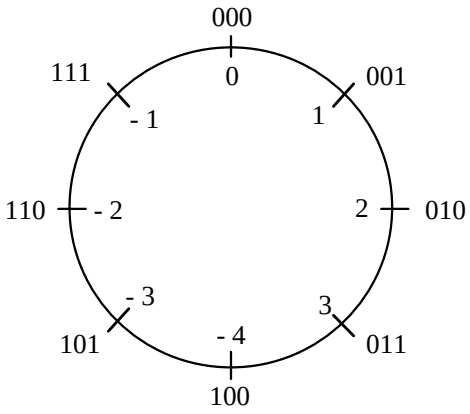
Zweierkomplement-Darstellung (1)

- Man addiert nach der Stellenkomplementierung noch eine 1
- Man erhält so das Zweierkomplement: $z_{zk} = 2^n - z$

0 . . . 0 ➔ Einerkomplement 1 . . . 1

➔ Zweierkomplement 0 . . . 0

- Nachteil:
  - Unsymmetrischer Zahlenbereich. Die kleinste negative Zahl ist betragsmäßig um 1 größer als die größte positive Zahl



- 3-Bit-Zweierkomplementzahlen (Beispiel):

Zweierkomplement-Darstellung (2)

- Alle anderen negativen Zahlen werden um 1 verschoben, das MSB bleibt aber gleich 1.
- Aus der ersten Stelle kann das Vorzeichen der Zahl abgelesen werden
- Aus dieser Konstruktion ergibt sich der Stellenwert des MSB einer Zweierkomplementzahl mit ***n+1*** Bit zu -2^n:

  $z_n\ z_{n-1}\ \ldots\ z_0$ hat den Wert:

$$Z = -z_n \cdot 2^n + z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + z_0$$

Beispiel

Die Zahl -77_{10} soll mit 8 Bit dargestellt werden

$$77_{10} = 0100\ 1101_2$$

Bitweise komplementieren

Mit Vorzeichenbit : $-77 = 1100\ 1101_2$

Einerkomplement : $-77 = 1011\ 0010_2$

Addition von 1

Zweierkomplement : $-77 = 1011\ 0011_2$

Offset-Dual- (Exzeß-)Darstellung

- Wird hauptsächlich bei der Exponenten-Darstellung von Gleitkommazahlen benutzt.
- Die Darstellung einer Zahl erfolgt in Form ihrer **Charakteristik**.

- Der gesamte Zahlenbereich wird durch Addition einer Konstanten (Exzeß, Offset) so nach oben verschoben, daß die kleinste (negative) Zahl die Darstellung **0…0** erhält.
- Bei ***n*** Stellen ist der Offset 2^{n-1}

- Der Zahlenbereich ist hier auch asymmetrisch.

Zusammenfassung der Möglichkeiten

Darstellung mit				
Dezimalzahl	Betrag + Vorzeichen	Einer-komplement	Zweier-komplement	Charakteristik
-4	- - -	- - -	1 0 0	0 0 0
-3	1 1 1	1 0 0	1 0 1	0 0 1
-2	1 1 0	1 0 1	1 1 0	0 1 0
-1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	0 1 1
0	1 0 0, 0 0 0	1 1 1, 0 0 0	0 0 0	1 0 0
1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	1 0 1
2	0 1 0	0 1 0	0 1 0	1 1 0
3	0 1 1	0 1 1	0 1 1	1 1 1

Fest- und Gleitkommazahlen

- Zahlendarstellung auf dem Papier:

Ziffern	0 .. 9
Vorzeichen	+ -
Komma (Punkt)	, .

- Zahlendarstellung im Rechner:

  Binärziffern 0, 1

➔ spezielle Vereinbarungen für die Darstellung von Vorzeichen und Komma/Punkt im Rechner sind erforderlich

- Darstellung des Vorzeichens:
  - Wurde im vorigen Abschnitt behandelt
- Darstellung des Kommas mit zwei Möglichkeiten:
  - Festkommadarstellung
  - Gleitkommadarstellung

Festkomma-Zahlen (1)

- Vereinbarung:
  - Das Komma sitzt innerhalb des Maschinenwortes, das eine Dualzahl enthalten soll, an einer festen Stelle.
- Meist setzt man das Komma hinter die letzte Stelle.
- Andere Zahlen können durch entsprechende Maßstabsfaktoren in die gewählte Darstellungsform überführt werden.
- Negative Zahlen:
  - Meist Zweierkomplement-Darstellung.
- Festkomma-Darstellungen werden heute hardwareseitig nicht mehr verwendet, jedoch bei Ein- oder Ausgabe!

Festkomma-Zahlen (2)

- Datentyp "integer" (Ganzzahlen) ist ein spezielles Festkommaformat.
- Manche Programmiersprachen erlauben die Definition von Ganzzahlen unterschiedlicher Länge.
- Beispiel "C": "short int", "int", "long int", "unsigned"

	DEC-VAX (einer der Urahnen)		IBM-PC, Apple Macintosh	
Datentyp	Anzahl der Bits	Zahlenbereich	Anzahl der Bits	Zahlenbereich
short int	16	-2^{15} ..$2^{15}-1$	16	-2^{15} ..$2^{15}-1$
int	32	-2^{31} .. $2^{31}-1$	16	-2^{15} ..$2^{15}-1$
long int	32	-2^{31} .. $2^{31}-1$	32	-2^{31} .. $2^{31}-1$

Gleitkomma-Darstellung (1)

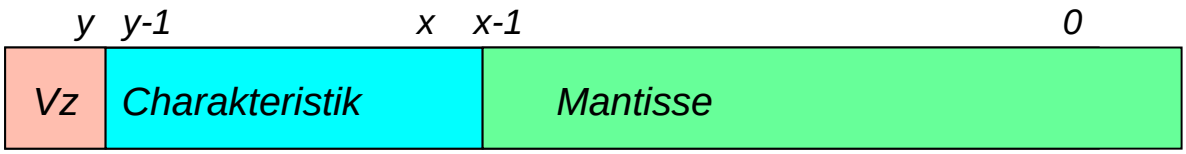
- Zur Darstellung von Zahlen, die betragsmäßig sehr groß oder sehr klein sind, verwendet man die Gleitkommadarstellung.
- Sie entspricht einer halblogarithmischen Form

$$X = \pm \text{Mantisse} \cdot b^{\text{Exponent}}$$

- Die Basis b ist für eine bestimmte Gleitkomma-Darstellung fest (meist 2 oder 16) und braucht damit nicht mehr explizit repräsentiert zu werden.
- Gleitkommazahlen werden meist *nicht* im Zweierkomplement, sondern mit Betrag und Vorzeichen dargestellt.

Gleitkomma-Darstellung (2)

- Bei der Mantisse ist die Lage des Kommas wieder durch Vereinbarung festgelegt (meist links vom MSB).
- Der Exponent ist eine ganze Zahl, die in Form ihrer Charakteristik dargestellt wird.
- Für die Charakteristik und die Mantisse wird im Rechner ein feste Anzahl von Speicherstellen festgelegt.
- Die Länge der Charakteristik y-x bestimmt die Größe des Zahlenbereichs.
- Die Länge der Mantisse x legt die Genauigkeit der Darstellung fest.



$$\text{Dezimalzahl} = (-1)^{Vz} * (0,\text{Mantisse}) * b^{\text{Exponent}}$$

$$\text{Exponent} = \text{Charakteristik} - b^{(y-1)-x}$$

Normalisierung

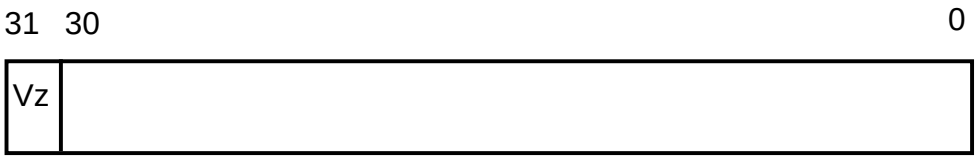
- Legt man für die Zahl 0 ein spezielles Bitmuster fest, ist die erste Stelle der Mantisse in normalisierter Form immer gleich 1.
- Die erste Stelle der Mantisse braucht im Maschinenformat gar nicht erst dargestellt zu werden, d.h. (0,1 . . . . .)
- Man spart ein Bit bei der Speicherung oder gewinnt bei gleichem Speicherbedarf ein Bit an Genauigkeit.
- Bei arithmetischen Operationen und bei der Konversion in andere Darstellungen darf diese Stelle natürlich nicht vergessen werden.

Beispiel (1)

3 verschiedene Maschinenformate mit je 32 Bit und b = 2.

Die Zahl 7135_{10} wird in jedem dieser Formate dargestellt.

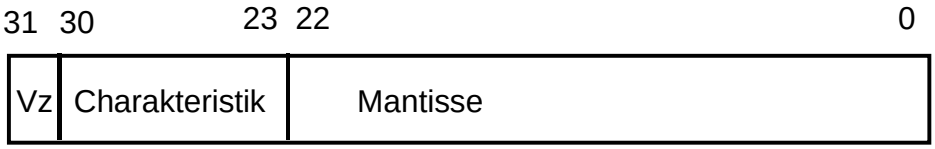
a) Festkommadarstellung mit Zweierkomplement



0 000 0000 0000 0000 0001 1011 1101 1111_2 = 0000 $1BDF_{16}$

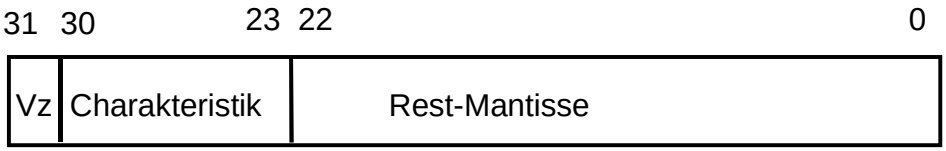
Beispiel (2)

b) Gleitkommadarstellung, normalisiert:



0 100 0110 1 110 1111 0111 1100 0000 0000_2 = 46EF $7C00_{16}$

c) Gleitkommadarstellung, normalisiert, erste "1" implizit:



0 100 0110 1 101 1110 1111 1000 0000 0000_2 = 46DE $F800_{16}$

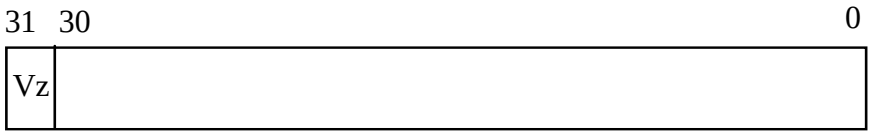
Darstellbarer Zahlenbereich (1)

- Die Anzahl darstellbarer Zahlen (Bitkombinationen) ist zwar in allen drei Fällen gleich (2^{32})

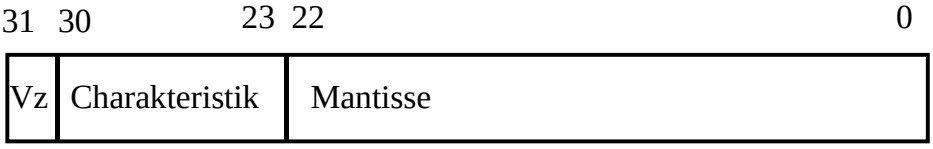
- Der Bereich und damit die Dichte darstellbarer Zahlen auf dem Zahlenstrahl ist aber sehr unterschiedlich.

Darstellbarer Zahlenbereich (2)

- Format a: Zahlen zwischen -2^{31} und $2^{31}-1$



- Format b:



negative Zahlen: $-(1-2^{-23}) \cdot 2^{127}$ ... $-0,5 \cdot 2^{-128}$,

positive Zahlen $0,5 \cdot 2^{-128}$ ... $(1-2^{-23}) \cdot 2^{127}$,

und *Null*

Darstellbarer Zahlenbereich (3)

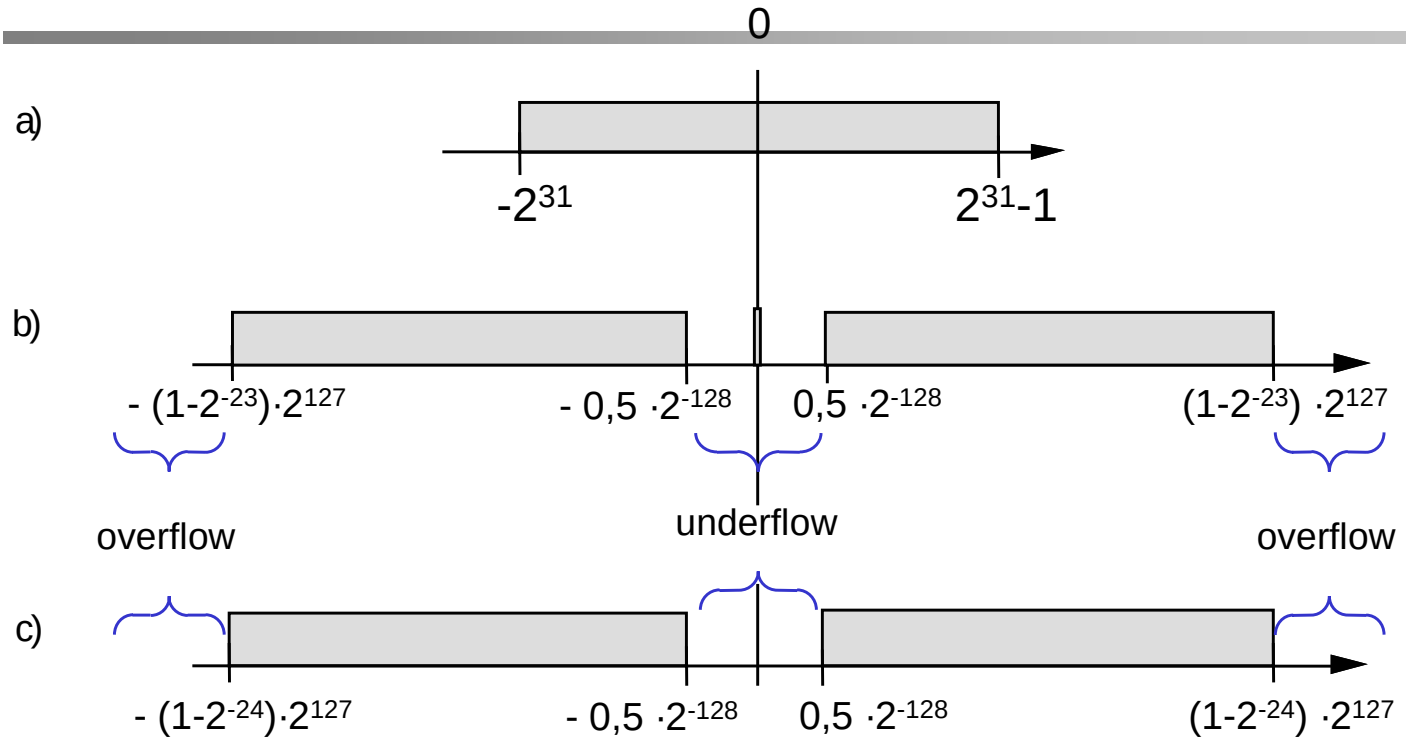
- Format c: normalisierte Gleitkommadarstellung

negative Zahlen: $-(1-2^{-24})\cdot 2^{127}$ ... $-0{,}5\cdot 2^{-128}$

positive Zahlen $0{,}5\cdot 2^{-128}$ ... $(1-2^{-24})\cdot 2^{127}$

Die Null kann nicht dargestellt werden!

Darstellbarer Zahlenbereich (4)

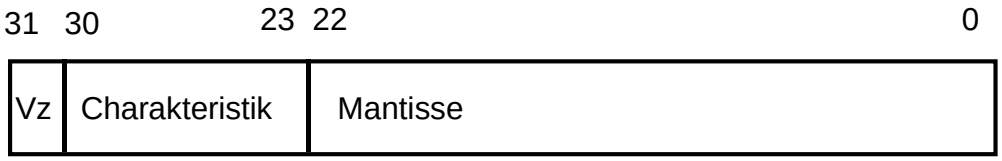


Charakteristische Zahlen

- Um verschiedene Gleitkommadarstellungen miteinander vergleichen zu können, definiert man drei charakteristische Zahlen:
- maxreal ist die größte darstellbare normalisierte positive Zahl
- minreal ist die kleinste darstellbare normalisierte positive Zahl
- smallreal ist die kleinste Zahl, die man zu 1 addieren kann, um einen von 1 verschiedenen Wert zu erhalten.

Beispiel

- In Format b) im letzten Beispiel



- maxreal = $(1 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}$ minreal = $0{,}5 \cdot 2^{-128}$
- Die Zahl 1 wird normalisiert als $0{,}5 \cdot 2^1$ dargestellt.
- Die nächstgrößere darstellbare Zahl hat in der Mantisse zusätzlich zur 1 in Bit 22 eine 1 in Bit 0.
- smallreal = $0{,}00000000000000000000001_2 \cdot 2^1$, also smallreal = $2^{-23} \cdot 2^1 = 2^{-22}$

Ungenauigkeiten

- Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen wächst bei Gleitkomma-Zahlen exponentiell mit der Größe der Zahlen, während sie bei Festkomma-Zahlen konstant ist.
- Bei der Darstellung großer Zahlen ergibt sich damit auch eine hohe Ungenauigkeit.
- Die Gesetzmäßigkeiten, die für reelle Zahlen gelten, werden für Maschinendarstellungen verletzt!

  Dies gilt insbesondere auch wenn diese Zahlen in einer höheren Programmiersprache oft `real` heißen.

Beispiel

- Das Assoziativgesetz (x + y) + z = x + (y + z) gilt selbst dann nicht unbedingt, wenn kein overflow oder underflow auftritt.

z.B.: x = 1; y = z = smallreal/2

(x + y) + z	=	(1 + smallreal/2) + smallreal/2
	=	1 + smallreal/2
	=	1
x + (y + z)	=	1 + (smallreal/2 + smallreal/2)
	=	1 + smallreal
	≠	1

Hinweis: smallreal ist die kleinste Zahl, die man zu 1 addieren kann, um einen von 1 verschiedenen Wert zu erhalten!

Problematik unterschiedlicher Definitionen

- Es existieren beliebig viele Möglichkeiten, selbst mit einer festen Wortbreite unterschiedliche Gleitkommaformate zu definieren (unterschiedliche Basis b, Darstellung der Null, Anzahl der Stellen für Charakteristik und Mantisse).

- Es existierten (bis Mitte der 80er Jahre) viele verschiedene, herstellerabhängige Formate

- Man konnte mit dem gleichen Programm auf unterschiedlichen Rechnern sehr unterschiedliche Ergebnisse erhalten!

- Normierung erforderlich

Normierung (IEEE-Standard)

- IEEE-P 754-Floating-Point-Standard
- In vielen Programmiersprachen lassen sich Gleitkomma-Zahlen mit verschiedener Genauigkeit darstellen
  - z.B. in C: float, double, long double
- Der IEEE Standard definiert mehrere Darstellungsformen
  - IEEE single: 32 Bit
  - IEEE double: 64 Bit
  - IEEE extended: 80 Bit