— Informatik I —
Modul 3: Schaltnetze

Universität Zürich[UZH]

CSG
Communication Systems Group

© 2012 Burkhard Stiller

ifi

Modul 3: Schaltnetze

- Formale Grundlagen logischer Beschreibungen
  - Boolesche Algebra, Schaltalgebra
- Normal- und Minimalformen
- Realisierung von Schaltnetzen auf Schalter- und Gatterebene
- Entwurf von Schaltnetzen
  - Logikminimierung, KV-Diagramme
  - Programmierung von Funktionen
- Laufzeiteffekte bei Schaltnetzen

© 2012 Burkhard Stiller

Schaltnetze

- Schaltnetze:
  - Rein kombinatorische logische Schaltungen
  - Kein Speicherverhalten
  - Logische Funktionen
- Beispiele:
  - Licht-Aus Warnung im Kraftfahrzeug
  - „Motor aus“ und „Tür auf“ und „Licht an“ $\Rightarrow$ Alarm

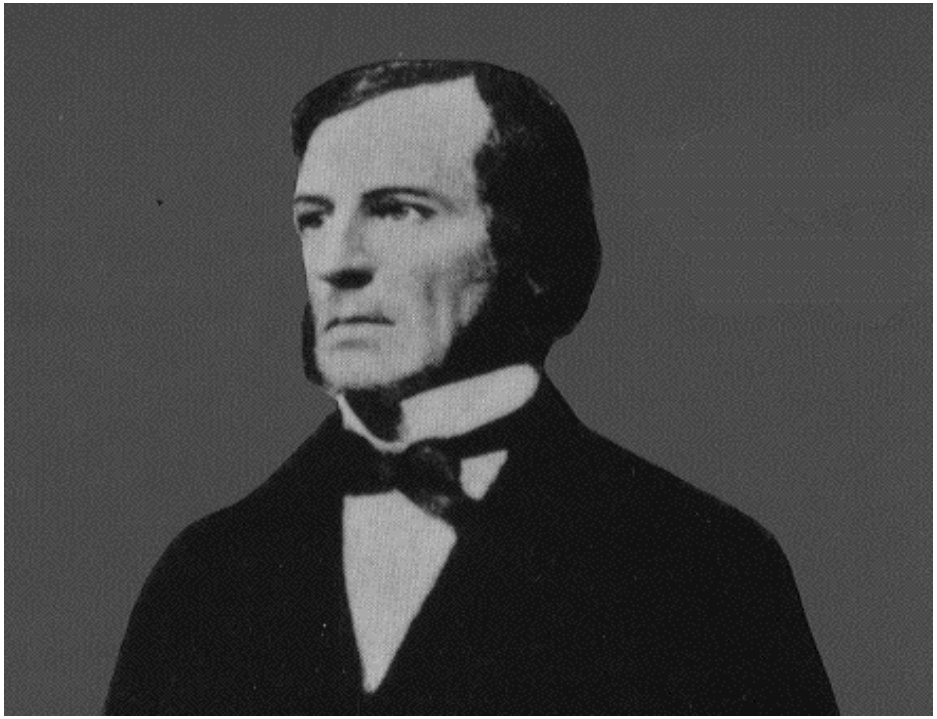
© 2012 Burkhard Stiller

Formale Grundlagen

- Zur Untersuchung und Beschreibung der Eigenschaften und des Verhaltens von logischen Funktionen ist die Boolesche Algebra hervorragend geeignet.

- Entwickelt wurde sie von dem Mathematiker

George Boole
(1815 –1864)



als Algebra der Logik.

© 2012 Burkhard Stiller

Boolesche Algebra

- Definition:
  - Als eine Boolesche Algebra bezeichnet man eine Menge V = {a,b,c,...}, auf der zwei zweistellige Operationen $\oplus$ und $\otimes$ derart erklärt sind, daß durch ihre Anwendung auf Elemente aus V wieder Elemente aus V entstehen (Abgeschlossenheit).

- Abgeschlossenheit: Für alle $a, b \in V$ gilt:

$$a \otimes b \in V$$
$$a \oplus b \in V$$

- Weiterhin müssen die vier Huntingtonschen Axiome gelten.

Huntingtonsche Axiome

- H1 — Kommutativgesetz:
  - $a \otimes b = b \otimes a$
  - $a \oplus b = b \oplus a$
- H2 — Distributivgesetz:
  - $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
  - $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$
- H3 — Neutrales Element:
  - Es existieren zwei Elemente $e, n \in V$, so dass gilt:
    - $a \otimes e = a$ (e wird Einselement genannt)
    - $a \oplus n = a$ (n wird Nullelement genannt)
- H4 — Inverses Element:
  - Für alle $a \in V$ existiert ein Element $\bar{a} \in V$, so dass gilt:
    - $a \otimes \bar{a} = n$
    - $a \oplus \bar{a} = e$

© 2012 Burkhard Stiller

Schaltalgebra

- Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch die folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

Boolesche Algebra	Schaltalgebra
V	{0,1}
$\oplus$	$\vee$
$\otimes$	$\wedge$
n	0
e	1
$\bar{a}$	$\bar{a}$

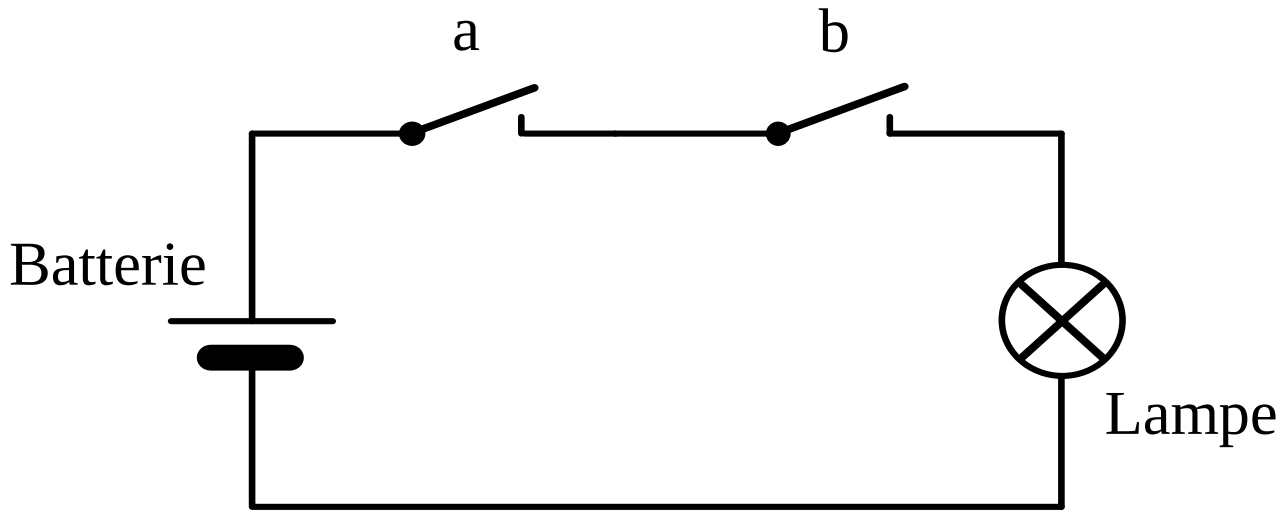
Zusätzlich alternative Schreibweise:

a + b	für	$a \vee b$	bzw. Benennung ODER
a & b, ab	für	$a \wedge b$	bzw. Benennung UND

Realisierung von logischen Verknüpfungen (1)

- Für die technische Realisierung logischer Verknüpfungen kann man sich zunächst einfache Schaltermodelle für logische Bausteine vorstellen.

- UND-Verknüpfung:

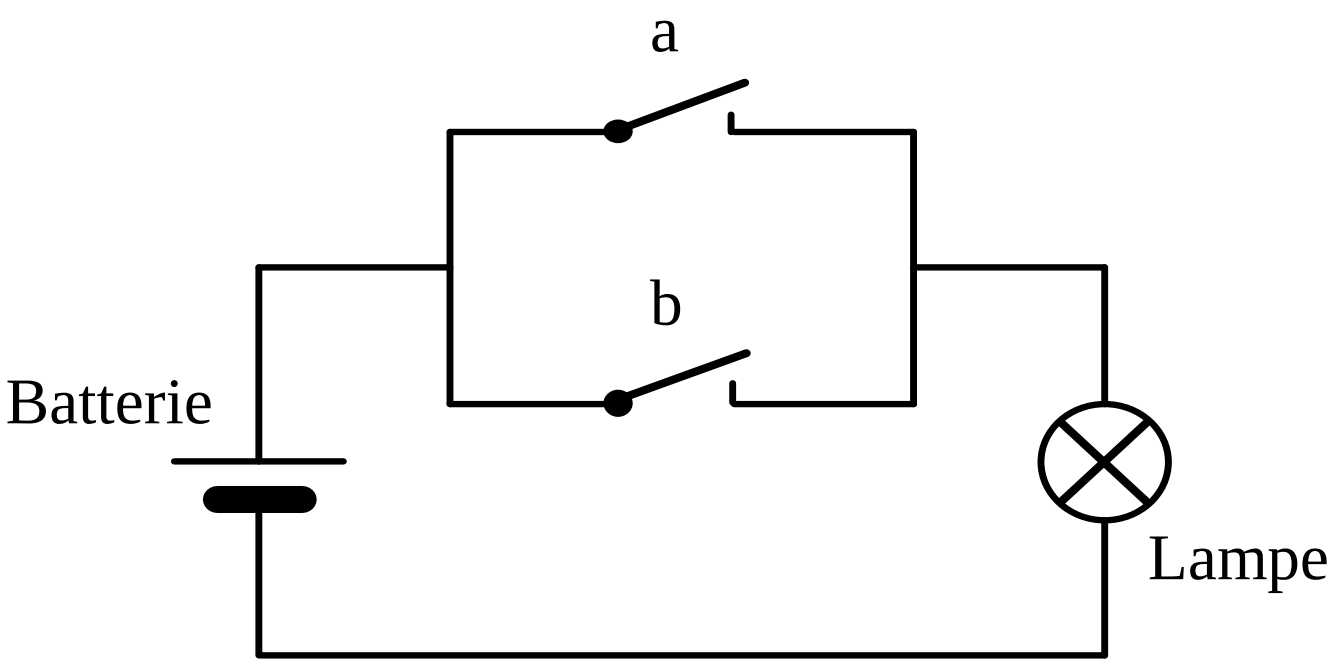


- Die Lampe brennt (Funktionswert 1) nur, wenn beide Schalter geschlossen sind (a UND b gleich 1), sonst bleibt die Lampe dunkel (Funktionswert 0).

© 2012 Burkhard Stiller

Realisierung von logischen Verknüpfungen (2)

- ODER-Verknüpfung:
  Die Lampe brennt, wenn einer der beiden Schalter geschlossen ist.



© 2012 Burkhard Stiller

Schaltalgebra

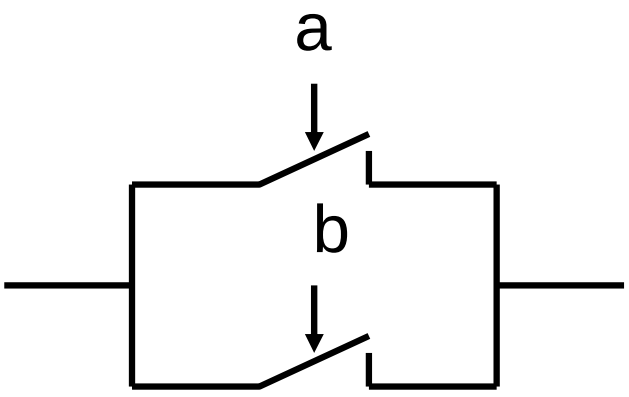
- Die Verknüpfungen können leicht in Funktionstabellen dargestellt werden:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Technische Realisierung mit Schaltern



© 2012 Burkhard Stiller

Schaltalgebra

- Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

- H1: $a \vee b = b \vee a$
  $a \wedge b = b \wedge a$

- H2: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

- H3: $a \wedge 1 = a$
  $a \vee 0 = a$

- H4: $a \wedge \overline{a} = 0$
  $a \vee \overline{a} = 1$

© 2012 Burkhard Stiller

Schaltalgebra

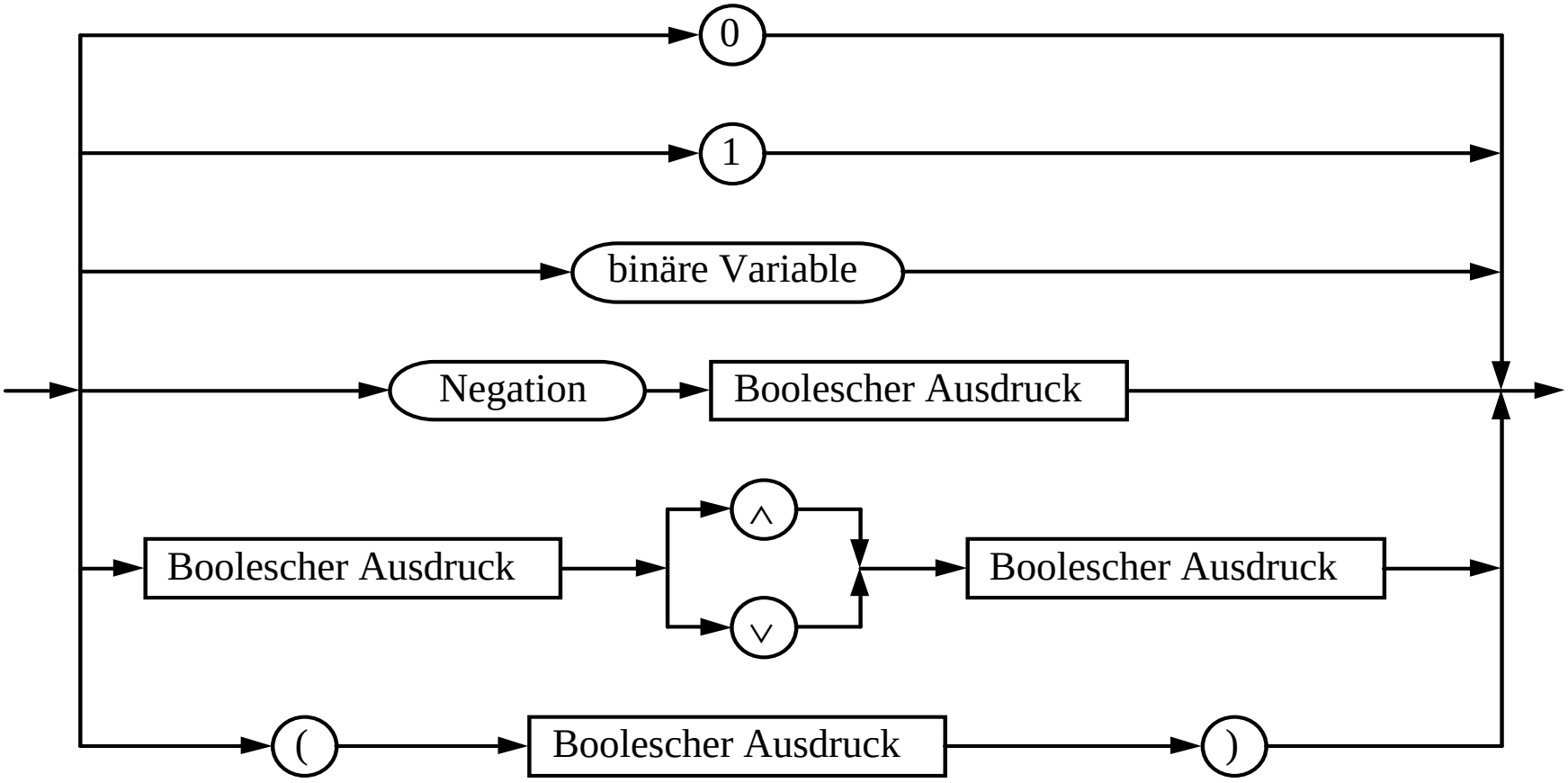
- Aus den vier Huntingtonschen Axiomen lassen sich weitere Sätze ableiten:
- Assoziativgesetz: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Idempotenzgesetz: $a \wedge a = a$
  $a \vee a = a$
- Absorptionsgesetz: $a \wedge (a \vee b) = a$
  $a \vee (a \wedge b) = a$
- DeMorgan-Gesetz: $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
  $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

  Auch benannt als: NAND, NOR

© 2012 Burkhard Stiller

Boolescher Ausdruck (1)

- Ein Boolescher Ausdruck ist eine Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren $\wedge$ und $\vee$ und Klammern besteht und syntaktische Regeln erfüllt, die durch folgendes Syntaxdiagramm gegeben sind:



© 2012 Burkhard Stiller

Boolescher Ausdruck (2)

- Beispiele:
  - syntaktisch korrekte Boolesche Ausdrücke: $a \vee b$, 0, $(\bar{a} \wedge b) \vee c$
- Keine Booleschen Ausdrücke, da syntaktisch nicht korrekt:
  - $a \vee \vee a$, $1\ 0$, $( ) \vee c$

- Für die Konstanten 0 und 1 verwendet man in der Schaltalgebra manchmal auch in Anlehnung an die Aussagenalgebra die Bezeichnung Wahrheitswerte:
  - 0 : falsch 1 : wahr

- Ein Boolescher Ausdruck hat in der Regel zunächst keinen Wahrheitswert, da er binäre Variablen enthalten kann.
  - Erst durch Belegung der binären Variablen mit Wahrheitswerten erhält der Boolesche Ausdruck einen Wahrheitswert.

© 2012 Burkhard Stiller

Definitionen

- Die Belegung einer Menge von binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten bezeichnet man als Interpretation.

- Die Interpretation eines Booleschen Ausdrucks liefert eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.

- Verschiedene Interpretationen eines Booleschen Ausdrucks können zu dem selben Wahrheitswert führen.

- Ein Boolescher Ausdruck, bei dem alle möglichen Interpretationen zum Wahrheitswert „wahr“ führen, heißt Tautologie.
  - Beispiel: $\overline{a} \vee a$ ist eine Tautologie (häufig auch als T markiert).

© 2012 Burkhard Stiller

Boolesche Funktionen

- Gegeben: Tupel von binären Variablen $(x_1,x_2,...,x_n)$

- Definition: Eine (n-stellige) Boolesche Funktion ordnet jeder möglichen Wahrheitswertbelegung dieser Variablen genau einen Wahrheitswert zu:

  $$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

- Wieviele Belegungen gibt es?

  2^n Belegungen

- Wieviele verschiedene n-stellige Funktionen gibt es?

  $2^{(2^n)}$ Funktionen

  (denn es gibt zu jedem Argument einer Booleschen Funktion zwei verschiedene Funktionswerte)

© 2012 Burkhard Stiller

Beispiele

- Negation:
  - Eine einstellige Boolesche Funktion

$$f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

die jedem Operanden aus dem Definitionsbereich {0,1} einen Funktionswert aus dem Wertebereich {0,1} zuordnet.

- $\wedge$ und $\vee$:
  - Zwei zweistellige Boolesche Funktionen:

$$f : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Darstellung boolescher Funktionen

1. Durch eine Funktionstabelle
2. Durch einen algebraischen Ausdruck (symbolische Form)
3. Durch einen Graphen

Funktionstabelle

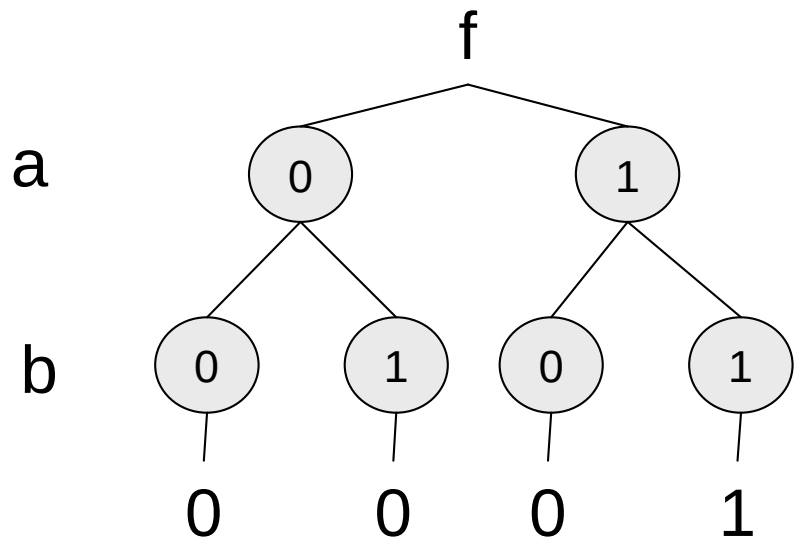
a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

symbolische Form

$f = a \wedge b$

Graph

(z.B. Shannon-Baum)



© 2012 Burkhard Stiller

Boolesche Funktionen

- Wie kommt man von der symbolischen Darstellung zur Funktionstabelle?
- Durch rekursive Auswertung des symbolischen Ausdrucks!
- Konvention:
  - Negation vor Konjunktion und Konjunktion vor Disjunktion
  - Durch Klammern kann eine andere Reihenfolge der Auswertung festgelegt werden
- Wieviele zweistellige Funktionen gibt es?
- Wieviele dreistellige Funktionen gibt es?

© 2012 Burkhard Stiller

16 mögliche zweistellige boolesche Funktionen

x_1 x_0	0011 0101	verbale Form	symbolische Darstellung	Bezeichnung
f_0	0000	konstant 0	0	Kontradiktion, Symbol: $\bot$ (unerfüllbar)
f_1	0001	x_1 und x_0	$x_1 \wedge x_0$	Konjunktion
f_2	0010	nicht x_0, aber x_1	$x_1 \wedge \overline{x_0}$	Inhibition
f_3	0011	identisch x_1	x_1	Identität
f_4	0100	nicht x_1, aber x_0	$\overline{x_1} \wedge x_0$	Inhibition
f_5	0101	identisch x_0	x_0	Identität
f_6	0110	x_1 ungleich x_0	$x_1 \not\leftrightarrow x_0$	Antivalenz, XOR
f_7	0111	x_1 oder x_0	$x_1 \vee x_0$	Disjunktion
f_8	1000	nicht (x_1 oder x_0)	$x_1 \overline{\vee} x_0$	NOR-Funktion, Peircescher Pfeil
f_9	1001	x_1 gleich x_0	$x_1 \leftrightarrow x_0$	Äquivalenz
f_{10}	1010	nicht x_0	$\overline{x_0}$	Negation
f_{11}	1011	wenn x_0, dann x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	Implikation
f_{12}	1100	nicht x_1	$\overline{x_1}$	Negation
f_{13}	1101	wenn x_1, dann x_0	$x_1 \rightarrow x_0$	Implikation
f_{14}	1110	nicht (x_1 und x_0)	$x_1 \overline{\wedge} x_0$	NAND-Funktion, Shefferscher Strich
f_{15}	1111	konstant 1	1	Tautologie, Symbol: T (allgemeingültig)

© 2012 Burkhard Stiller

Vollständige Operatorensysteme

- Definition:

  Ein System von Operatoren, mit dem alle booleschen Funktionen dargestellt werden können, heißt vollständiges Operatorensystem.

- Die Operatoren ($\wedge$, $\vee$, $\overline{\ }$) bilden ein vollständiges Operatorensystem.

- Beispiel:

  $a \leftrightarrow b$ liefert das gleiche Ergebnis wie $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$.

  $\leftrightarrow$ läßt sich durch die Grundoperationen $\wedge$, $\vee$ und $\overline{\ }$ ersetzen

Vollständige Operatorensysteme

Operatoren-system	Darstellung der ...		
	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$(\wedge, \vee, \neg)$	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$a \vee b$
$(\wedge, \neg)$	$\bar{a}$	$a \wedge b$	$\overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$
$(\vee, \neg)$	$\bar{a}$	$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$	$a \vee b$
$(\overline{\wedge})$	$a \mathbin{\overline{\wedge}} a$	$(a \mathbin{\overline{\wedge}} b) \mathbin{\overline{\wedge}} (a \mathbin{\overline{\wedge}} b)$	$(a \mathbin{\overline{\wedge}} a) \mathbin{\overline{\wedge}} (b \mathbin{\overline{\wedge}} b)$
$(\overline{\vee})$	$a \mathbin{\overline{\vee}} a$	$(a \mathbin{\overline{\vee}} a) \mathbin{\overline{\vee}} (b \mathbin{\overline{\vee}} b)$	$(a \mathbin{\overline{\vee}} b) \mathbin{\overline{\vee}} (a \mathbin{\overline{\vee}} b)$
$(\wedge, \not\leftrightarrow)$	$a \not\leftrightarrow 1$	$a \wedge b$	$a \not\leftrightarrow b \not\leftrightarrow (a \wedge b)$

Hinweis: $\wedge$ wird häufig weggelassen, Bsp: $a \wedge b \leftrightarrow ab$

Tautologie (1)

- Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

- Gleichbedeutend:
  Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie?

- Gegeben seien zwei Boolesche Funktionen:
  $f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$
  $f_2(a,b) = (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$

- Ist f_1 identisch mit f_2
  oder
  ist $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) \leftrightarrow (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$ eine Tautologie?

Tautologie (2)

- Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

- Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

a b	$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$	$(a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$	$x \leftrightarrow y$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

© 2012 Burkhard Stiller

Tautologie (3)

- Mittels algebraischer Umformung:

$$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = [(a \wedge b) \vee \overline{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \overline{b}]$$

(Distributivgesetz)

$$= [(a \vee \overline{a}) \wedge (b \vee \overline{a})] \wedge [(a \vee \overline{b}) \wedge (b \vee \overline{b})]$$

(Distributivgesetz)

$$= [1 \wedge (b \vee \overline{a})] \wedge [(a \vee \overline{b}) \wedge 1]$$

(Inverses Element)

$$= (b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee \overline{b})$$

(Neutrales Element)

$$= (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$$

(Kommutativgesetz)

Modul 3: Schaltnetze

- Formalen Grundlagen logischer Beschreibungen
  - Boolesche Algebra, Schaltalgebra
- Normal- und Minimalformen
- Realisierung von Schaltnetzen auf Schalter- und Gatterebene
- Entwurf von Schaltnetzen
  - Logikminimierung, KV-Diagramme
  - Programmierung von Funktionen
- Laufzeiteffekte bei Schaltnetzen

© 2012 Burkhard Stiller

Normalformen

- Eine boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

- Eine Standarddarstellung boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem ($\wedge$, $\vee$, $\overline{\ }$) ist die konjunktive (KNF) und die disjunktive Normalform (DNF).

- Definition:
  Ein Literal L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation $\overline{x_i}$
  d.h., $L_i \in \{x_i, \overline{x_i}\}$

© 2012 Burkhard Stiller

Produktterme

- Definition:
  Ein Produktterm $K(x_1,...,x_m)$ ist die Konjunktion von Literalen

$$\bigwedge_{i\in\{1,...,m\}} L_i = L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$$

  oder die Konstante "0" oder "1 "

- Beispiele: $a \wedge a \wedge b$ $\quad$ $\overline{x_i} \wedge x_i$

- Jeder Produktterm $K(x_1,...,x_m) = \bigwedge_{i\in\{1,...,m\}} L_i$ kann so dargestellt werden, daß eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.

© 2012 Burkhard Stiller

Literale und Produktterme

- Falls $L_h = x$, $L_j = x$, $h \neq j$ (mehrfach bejahtes Auftauchen)

  $\Rightarrow \quad L_h \wedge L_j = x$

  $\Rightarrow \quad K(x_1,...,x_m) = \bigwedge_{i=1}^{m} L_i$

- Mehrfaches Auftreten von x kann nach Idempotenzgesetz gestrichen werden ($x \wedge x = x$).

- Falls $L_h = x$ und $L_j = \overline{x}$ (gemischtes bejahtes und negiertes Auftreten)

  $\Rightarrow L_h \wedge L_j = 0$

  $\Rightarrow K(x_1,...,x_m) = 0$ (Produktterm wird zu 0)

© 2012 Burkhard Stiller

Implikant und Minterm

- Definition:
  Ein Produktterm $K(x_1,...,x_n)$ heißt Implikant einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_n)$, wenn $K \rightarrow y$

- Das heißt, für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt:
  Wenn K(B) = 1, dann ist auch y(B) = 1

- Definition:
  Ein Implikant einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_n)$ heißt Minterm, wenn ein Literal jeder Variablen x_i der Funktion y im Implikanten genau einmal vorkommt.

© 2012 Burkhard Stiller

Minterme

- Minterme einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_4)$:

  $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

  $x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4$

- Keine Minterme der Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_4)$:

  $x_1 \wedge x_2$

  $x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$

© 2012 Burkhard Stiller

Disjunktive Normalform

- Damit läßt sich die disjunktive Normalform definieren:

- Definition:
  Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1,...,x_n)$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt disjunktive Normalform (DNF) der Funktion y, wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung aller Minterme K_i besteht:

  $y = K_0 \vee K_1 \vee ..... \vee K_k$, k 2^n-1

- Es darf dabei keine zwei Konjunktionen K_i, K_j mit i j geben, die zueinander äquivalent sind.

Disjunktive Normalform

- Beispiele
- $f(a,b,c) = a\,b\,c \vee a\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c$
  ist in DNF.
- $f(a,b,c) = a\,b\,c \vee a\,\overline{b} \vee c\,a\,b \vee a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c})$
  ist nicht in DNF, denn:
  - $a\,\overline{b}$ enthält nicht alle Variablen
  - a b c und c a b sind äquivalent
  - $a\,(b\,c \vee \overline{b}\,\overline{c})$ ist keine reine Konjunktion

© 2012 Burkhard Stiller

Implikat

- Definition:
  Es sei $D(x_1,...,x_m)$ eine Disjunktion von Literalen
  $\bigvee_{i\in\{1,...,m\}} L_i = L_1 \vee \ldots \vee L_m$ oder die Konstante "0" oder "1"

- Der Term $D(x_1,...,x_m)$ heißt Implikat einer Booleschen Funktion

  $y(x_1,...,x_m)$, wenn $\overline{D} \rightarrow \overline{y}$

- Das heißt für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt:
  Wenn $D(B) = 0$, dann ist auch $y(B) = 0$.

Maxterm

- Definition:
  Ein Implikat einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_m)$ heißt Maxterm, wenn ein Literal jeder Variable x_i der Funktion y im Implikaten genau einmal vorkommt.

- Maxterm-Beispiele für die Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_3)$:

  $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$

  $x_1 \vee x_2 \vee x_3$

Konjunktive Normalform

- Definition:
  Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1,...,x_m)$ gegeben.

- Ein Boolescher Ausdruck heißt konjunktive Normalform (KNF), wenn er aus einer konjunktiven Verknüpfung aller Maxterme D_i besteht:

- $y = D_0 \wedge D_1 \wedge ..... \wedge D_k$, $k \quad 2^n-1$

- Es darf dabei keine zwei Disjunktionen D_i, D_j mit $i \neq j$ geben, die zueinander äquivalent sind.

Deutung: Disjunktive/Konjunktive Normalform

- Jeder Minterm einer DNF entspricht einer Zeile in der Funktionstabelle, die den Funktionswert 1 liefert.
- Jeder Maxterm einer KNF entspricht einer Zeile in der Funktionstabelle, die den Funktionswert 0 liefert.
- Disjunktive und konjunktive Normalformen sind eindeutige Darstellungen!
  - Bis auf Permutationen (z.B. abc, acb, bac, bca, cab, cba sind äquivalent)

© 2012 Burkhard Stiller

DNF und KNF

- In einer Funktion mit n Variablen *können* bis zu 2^n Minterme bzw. Maxterme auftreten. Für n = 3 sind diese:

	Minterm	Maxterm
0	$\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$	$a \vee b \vee c$
1	$a\ \overline{b}\ \overline{c}$	$\overline{a} \vee b \vee c$
2	$\overline{a}\ b\ \overline{c}$	$a \vee \overline{b} \vee c$
3	$a\ b\ \overline{c}$	$\overline{a} \vee \overline{b} \vee c$
4	$\overline{a}\ \overline{b}\ c$	$a \vee b \vee \overline{c}$
5	$a\ \overline{b}\ c$	$\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$
6	$\overline{a}\ b\ c$	$a \vee \overline{b} \vee \overline{c}$
7	$a\ b\ c$	$\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}$

© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel: DNF und KNF

Um eine Funktion zu beschreiben, reicht die Angabe aller Minterme (oder aller Maxterme) aus.

	c b a	y	Minterme	Maxterme
	0 0 0	1	$\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$	
	0 0 1	0		$\overline{a} \vee b \vee c$
	0 1 0	0		$a \vee \overline{b} \vee c$
	0 1 1	1	$a\ b\ \overline{c}$	
	1 0 0	1	$\overline{a}\ \overline{b}\ c$	
	1 0 1	0		$\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$
	1 1 0	0		$a \vee \overline{b} \vee \overline{c}$
	1 1 1	1	$a\ b\ c$	

DNF: $y = (\ \overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}\ ) \vee (a\ b\ \overline{c}\ ) \vee (\ \overline{a}\ \overline{b}\ c\ ) \vee (\ a\ b\ c\ )$

KNF: $y = (\ \overline{a} \vee b \vee c\ )(a \vee \overline{b} \vee c\ )(\ \overline{a} \vee b \vee \overline{c}\ )(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}\ )$

© 2012 Burkhard Stiller

Herkunft der Bezeichnungen

- Funktionen aus genau einem Minterm liefern für genau eine Belegung den Funktionswert 1, d.h., abgesehen von der trivialen Nullfunktion haben sie eine minimale Anzahl an Einsen.

- Entsprechend liefern Funktionen aus nur einem Maxterm für genau eine Belegung als Ergebnis 0, d.h., sie haben abgesehen von der Einsfunktion die maximale Anzahl an Einsen.

© 2012 Burkhard Stiller

DNF oder KNF aus der Funktionstabelle

- DNF:

  Aus der Funktionstabelle einer Funktion erhält man die Minterme, indem man in allen Zeilen mit dem Funktionswert 1 jeweils alle Eingangsvariablen mit $\wedge$ verknüpft und dabei Eingangsvariablen mit dem Wert 0 negiert. Durch die disjunktive Verknüpfung dieser Minterme kann ein Boolescher Funktionsausdruck in DNF hergeleitet werden.

- KNF:

  Aus der Funktionstabelle einer Funktion erhält man die Maxterme, indem man in allen Zeilen mit dem Funktionswert 0 jeweils alle Eingangsvariablen mit $\vee$ verknüpft und dabei Eingangsvariablen mit dem Wert 1 negiert. Durch die konjunktive Verknüpfung dieser Minterme kann ein Boolescher Funktionsausdruck in KNF hergeleitet werden.

© 2012 Burkhard Stiller

DNF oder KNF aus beliebiger Form

- Um Funktionen aus der DF bzw. KF in die DNF bzw. KNF zu überführen, ist der Shannonsche Entwicklungssatz behilflich.

- Entwicklung nach der Variablen x_i:
  - die Variable wird in der Funktion auf den Wert 1 gesetzt,
  - der entstehende Term konjunktiv mit x_i verknüpft,

  und $\vee$ -verknüpft mit:
  - die Variable wird in der Funktion auf den Wert 0 gesetzt und
  - der entstehende Term konjunktiv mit $\overline{x_i}$ verknüpft

$$y = f(x_1,\ldots, x_n)$$
$$= [x_i \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1} ,\ldots, x_n)] \vee [\overline{x_i} \wedge f(x_1 ,\ldots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1} ,\ldots, x_n)]$$

Beispiel:

$$y = a\ \overline{b}\ c \vee \overline{a}\ \overline{b} \vee b\ c$$

Shannon-Entwicklung nach a und $\overline{a}$

$$= a\,[1\ \overline{b}\ c \vee 1\ \overline{b} \vee b\ c\,] \vee \overline{a}\,[0\ \overline{b}\ c \vee 0\ \overline{b} \vee b\ c\,]$$

H4: $1\ \overline{b} = 0$ und H3: $x \vee 0 = x$

$$= a\,[\ \overline{b}\ c \vee b\ c\,] \vee \overline{a}\,[\ \overline{b} \vee b\ c\,]$$

Syntaktische Anpassung der Terme, Sortierung von b nach nicht- und negierten Literalen und H3: $x \wedge 1 = x$

$$= a\,[\,b\,(\,c\,) \vee \overline{b}\,(\,c\,)\,] \vee \overline{a}\,[\,b\,(\,c\,) \vee \overline{b}\,(\,1\,)\,]$$

Erweiterung von c im letzten Term über H4: $c \vee \overline{c} = 1$

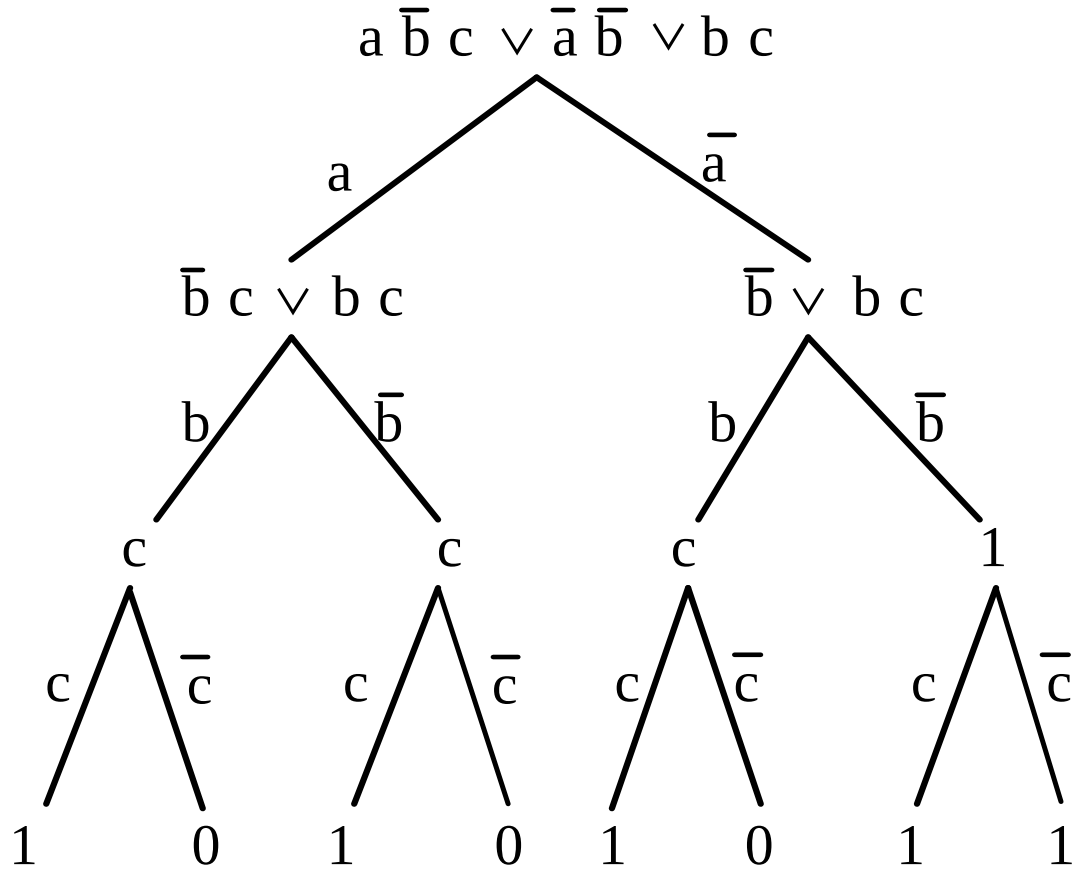
$$= a\,[\,b\,(\,c\,) \vee \overline{b}\,(\,c\,)\,] \vee \overline{a}\,[\,b\,c \vee \overline{b}\,(\,c \vee \overline{c}\,)\,]$$

Distributivgesetz (Ausmultiplizieren)

$$= a\ b\ c \vee a\ \overline{b}\ c \vee \overline{a}\ b\ c \vee \overline{a}\ \overline{b}\ c \vee \overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$$

© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel: Shannon-Baum



Nachdem die Funktion nach allen Variablen entwickelt wurde, können die Minterme durch Verfolgen der Äste des Baums gefunden werden, die zu einer 1 führen.

© 2012 Burkhard Stiller

DNF und KNF

Wiederholung:

- Disjunktive und konjunktive Normalformen sind eindeutige Darstellungen!
  - bis auf Permutationen (z.B. abc, acb, bac, bca, cab, cba sind äquivalent)

Beispiel: $y = a\ \overline{b} \vee c$

- DNF: $y = \overline{a}\ \overline{b}\ c \vee \overline{a}\ b\ c \vee a\ \overline{b}\ \overline{c} \vee a\ \overline{b}\ c \vee a\ b\ c$
- KNF: $y = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \overline{b} \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)$

Minimalformen (1)

- Ziele:
  - „Möglichst kurze“ Boolesche Ausdrücke für eine gegebene Boolesche Funktion.
  - Technische Realisierung einer Schaltung mit möglichst geringen Kosten.

- Ähnlich zum Aufbau der disjunktiven und konjunktiven Normalform gibt es eine disjunktive (DMF) und konjunktive (KMF) Minimalform.

- Es kann mehrere disjunktive und konjunktive Minimalformen für die gleiche Funktion geben.
  - Beispiel:
    - $y = a\,\overline{b} \vee b\,\overline{c} \vee \overline{a}\,c$ und
    - $y = a\,\overline{c} \vee \overline{b}\,c \vee \overline{a}\,b$

    stellen dieselbe Funktion dar, beides sind disjunktive Minimalformen.

© 2012 Burkhard Stiller

Minimalformen (2)

- Das Auffinden einer Minimalform ist insbesondere für Funktionen mit einer größeren Anzahl von Variablen keine triviale Aufgabe.

- Oft können nur suboptimale Lösungen unter Verwendung von Heuristiken gefunden werden.

- Bei Minimierungsverfahren geht man in zwei Schritten vor:
  - Es wird eine Menge von Implikanten bzw. Implikate der Funktion y mit einer möglichst geringen Anzahl von Literalen gebildet.
  - Aus dieser Menge wird eine möglichst geringe Anzahl von Implikanten bzw. Implikate herausgesucht, deren Disjunktion bzw. Konjuktion die Funktion y ergeben.

© 2012 Burkhard Stiller

NAND/NOR-Konversion

- ($\overline{\wedge}$)-System (NAND-System) und ($\overline{\vee}$)-System (NOR-System) sind vollständige Operatorensysteme

  ⇨ beliebige disjunktive und konjunktive Ausdrücke können mit NAND- und NOR-Verknüpfungen dargestellt werden.

- Überführungen (vier Fälle):

1. Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System
2. Fall: Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System
3. Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\vee}$)-System
4. Fall: Funktion in konjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

- Warum sind diese Überführungen relevant?

  ⇨ Einfache Implementierung in Hardware!

  – NANDs/NORs sind sehr einfach in Schaltungen realisierbar.

© 2012 Burkhard Stiller

NAND-Konvertierung (Beispiel: 1. Fall)

- 1. Fall:
  Funktion in disjunktiver Form $\Rightarrow$ ($\overline{\wedge}$)-System

  Gegeben sei eine Funktion in disjunktiver Form.

- Überführung:
  1. Doppelte Negation
  2. Anschließende Anwendung der DeMorganschen Regeln

- Dann erhält man einen Ausdruck, der nur noch NAND als Operator enthält.

Beispielrechnung

$$y = \overline{\overline{a}\,b\,c \vee a\,\overline{b}\,c \vee a\,b\,\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}$$

$$= \overline{\overline{a}\,b\,c \vee a\,\overline{b}\,c \vee a\,b\,\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}$$

$$= \overline{\overline{a}\,b\,c} \wedge \overline{a\,\overline{b}\,c} \wedge \overline{a\,b\,\overline{c}} \wedge \overline{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}$$

$$= \text{NAND}_4(\text{NAND}_3(\overline{a}, b, \overline{c}), \text{NAND}_3(a, \overline{b}, c), \text{NAND}_3(a, b, \overline{c}), \text{NAND}_3(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}))$$

Dabei ist $\text{NAND}_k(x_1,...,x_k)$ eine k-stellige Funktion, für die gilt:

$$\text{NAND}_k(x_1,...,x_k) \begin{cases} 0 \text{ für } x_1 = ... = x_k = 1 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

© 2012 Burkhard Stiller

$NAND_2$-Funktion

Darstellung der $NAND_2$-Funktion durch den $\overline{\wedge}$ Operator:

Problem: Die Operatoren $\overline{\wedge}$ und $\overline{\vee}$ sind nicht assoziativ.

$$(x_1 \mathbin{\overline{\wedge}} x_2) \mathbin{\overline{\wedge}} x_3 \neq x_1 \mathbin{\overline{\wedge}} (x_2 \mathbin{\overline{\wedge}} x_3)$$

$$(x_1 \mathbin{\overline{\vee}} x_2) \mathbin{\overline{\vee}} x_3 \neq x_1 \mathbin{\overline{\vee}} (x_2 \mathbin{\overline{\vee}} x_3)$$

$$NAND_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} = \overline{(x_1 \mathbin{\overline{\wedge}} x_2)} \mathbin{\overline{\wedge}} x_3$$

$$(x_1 \mathbin{\overline{\wedge}} x_2) \mathbin{\overline{\wedge}} x_3 = \overline{\overline{x_1 \wedge x_2} \wedge x_3} \neq$$

$$x_1 \mathbin{\overline{\wedge}} (x_2 \mathbin{\overline{\wedge}} x_3) = \overline{x_1 \wedge \overline{x_2 \wedge x_3}}$$

Wichtige Zusammenfassung

- Schaltalgebra
  - Boolesche Ausdrücke und Funktionen
  - Vollständiger Operatorensysteme
- Darstellung
  - Funktionstabelle
  - Symbolische Form
  - Shannon Baum (Graph)
- Normalformen
  - Produktterm und Literal
  - Disjunktive Normalform:
    - Implikant und Minterm
      - Zeile einer Funktionstabelle mit dem Funktionswert 1
  - Konjunktive Normalform:
    - Implikat und Maxterm
      - Zeile einer Funktionstabelle mit dem Funktionswert 0
- Minimalformen
  - Nicht eindeutig, aber „kurz“ in Form notwendiger Min-/Maxterme

© 2012 Burkhard Stiller

Modul 3: Schaltnetze

- Formale Grundlagen logischer Beschreibungen
  - Boolesche Algebra, Schaltalgebra
- Normal- und Minimalformen
- Realisierung von Schaltnetzen auf Schalter- und Gatterebene
- Entwurf von Schaltnetzen
  - Logikminimierung, KV-Diagramme
  - Programmierung von Funktionen
- Laufzeiteffekte bei Schaltnetzen

© 2012 Burkhard Stiller

Realisierung von Schaltnetzen

Hierarchie:

- Register-Transfer-Ebene: logische Bausteine als Grundelemente (Grundlage der Programmierung)
  - Multiplexer, Schieberegister, Addierer, ...

In folgenden Modulen ein wenig diskutiert

- Gatterebene: logische Gatter
  - UND, ODER, NAND,...

In M3 soeben theoretisch gezeigt, jetzt in Gatter übersetzt

- Schalterebene: Transistoren als Schalter
  - Elektrotechnische Grundlagen

Beispiel in M1 erwähnt

Bottom-up

- Layoutebene: Transistortechnologie
  - Elektrotechnische Grundlagen

Beispiel in M1 erwähnt

© 2012 Burkhard Stiller

Gatterebene

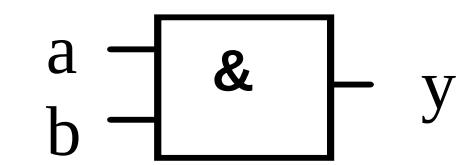
- Abstrahierung von der internen Realisierung der Verknüpfungsbausteine

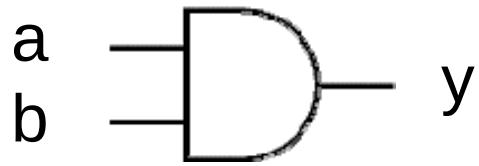
- Beschränkung auf das logische Verhalten
  - Abbildung logischer Funktionen auf Schaltungen ohne tiefergehende elektrotechnische Kenntnisse

- Verknüpfungsbausteine werden durch Schaltsymbole dargestellt

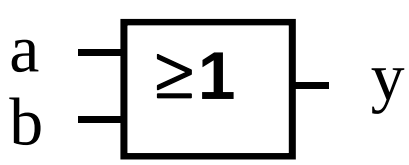
© 2012 Burkhard Stiller

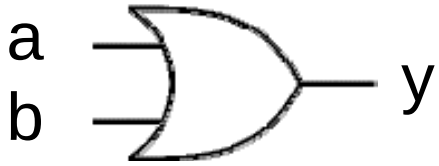
Schaltsymbole (DIN 40900 Teil 12, ANSI/IEEE-Standard 91-1984, IEC-Standard & US-Symbole)



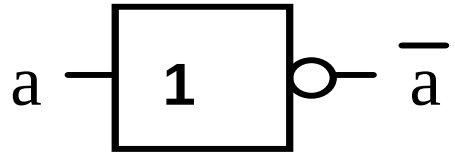


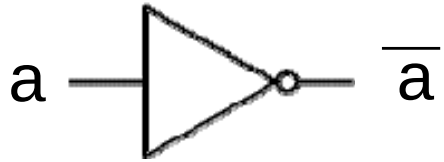
UND-Verknüpfung



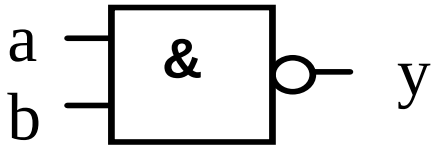


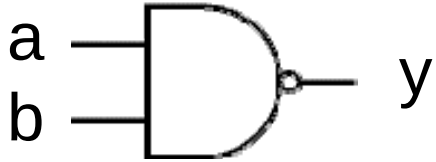
ODER-Verknüpfung



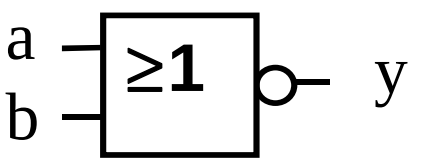


Negation





NAND-Verknüpfung



NOR-Verknüpfung

Verknüpfungsbausteine dieser Art werden **Gatter** genannt.

© 2012 Burkhard Stiller

Bedeutung der Zeichen

& : andere Schreibweise für $\wedge$

1 : der Ausgang ist genau dann 1,
wenn an 1 Eingängen eine 1 liegt

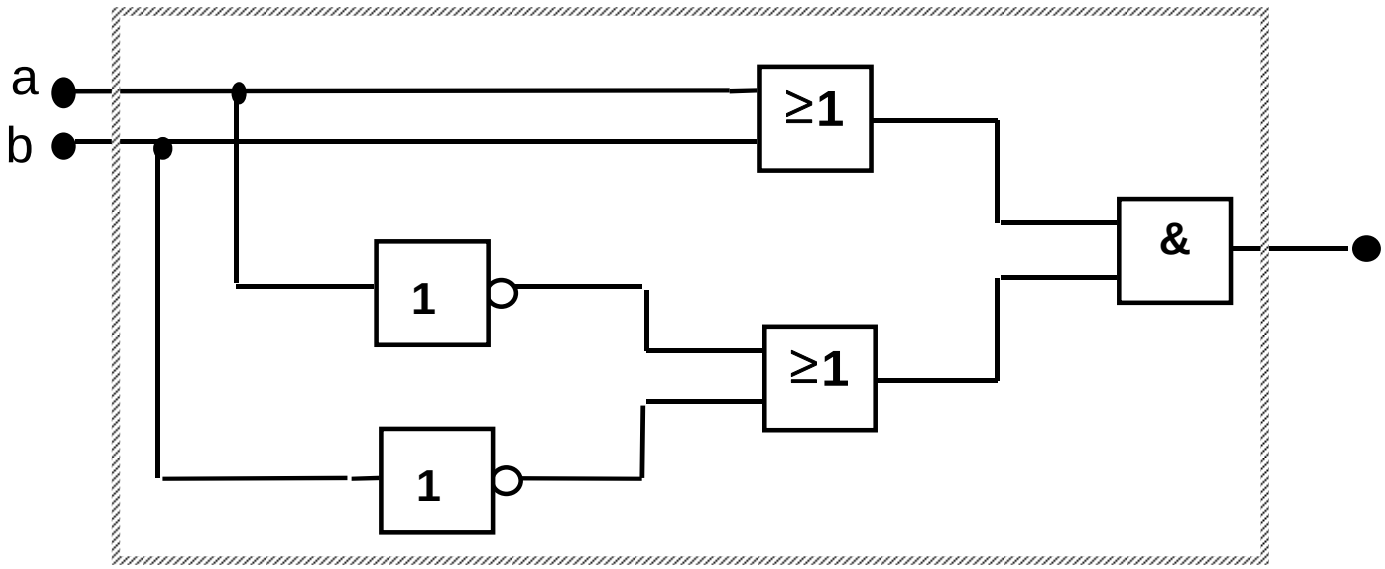
° : Negation

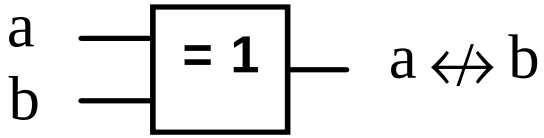
Weitere Symbole, alte Darstellungen und die Logik hinter den Symbolen finden sich im Web!

© 2012 Burkhard Stiller

Antivalenz-Gatter

Aus einfacheren Gattern lassen sich hierarchisch komplexere Gatter aufbauen, die teilweise eigene Symbole besitzen.



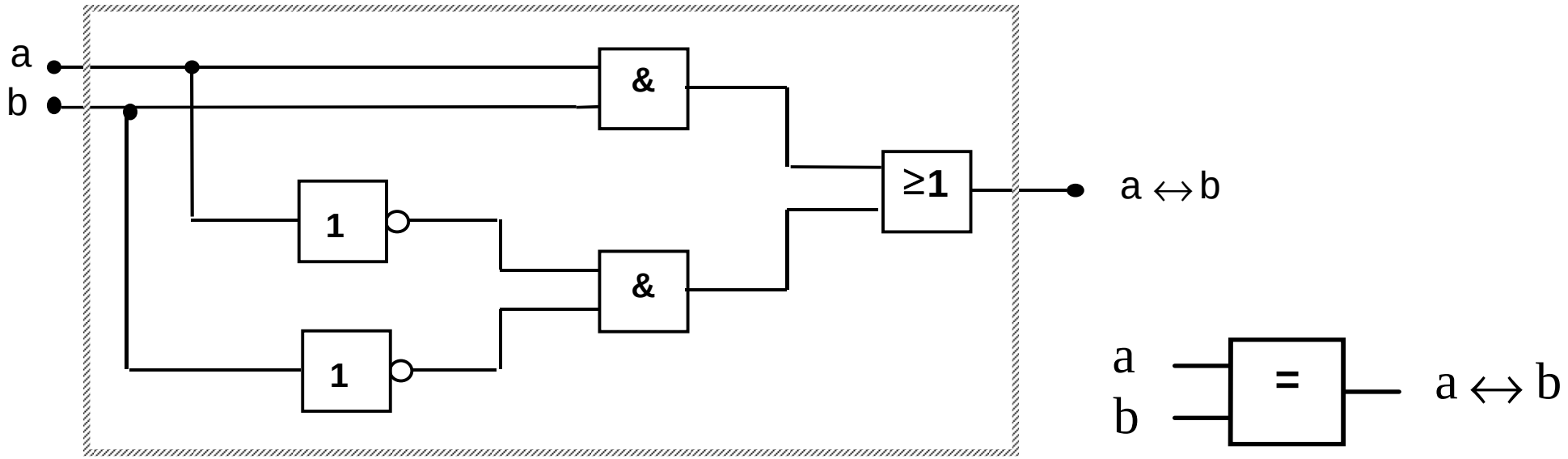


Antivalenz als Komposition fünf einfacherer Schaltglieder.

Geeignet zur Überlauferkennung (siehe M2)

© 2012 Burkhard Stiller

Äquivalenz-Gatter



Äquivalenz als Komposition fünf einfacherer Schaltglieder.

© 2012 Burkhard Stiller

Modul 3: Schaltnetze

- Formale Grundlagen logischer Beschreibungen
  - Boolesche Algebra, Schaltalgebra
- Normal- und Minimalformen
- Realisierung von Schaltnetzen auf Schalter- und Gatterebene
- Entwurf von Schaltnetzen
  - Logikminimierung, KV-Diagramme
  - Programmierung von Funktionen
- Laufzeiteffekte bei Schaltnetzen

© 2012 Burkhard Stiller

Entwurf von Schaltnetzen (1)

- Praktischer Entwurf von Schaltnetzen muß beachten, daß
  - reale Gatter keine idealen Verknüpfungen sind, sondern z.B. Wärme abgeben,
  - reale Gatter Platz benötigen (Quadratmicrometer),
  - reale Gatter Verzögerungszeiten besitzen (Microsekunden),
  - ...

- Teil 1: Technische Kriterien:
  - Leistungsaufnahme, Schaltzeit, Platzbedarf, Material, Lebensdauer
  - Korrekte Realisierung unter Beachtung des statischen und dynamischen Verhaltens der verwendeten Bauelemente (Hasards und Wettläufe)
  - Berücksichtigung technischer Beschränkungen, z.B. begrenzte Anzahl von Eingängen der Logikelemente, begrenzte Belastbarkeit von Elementausgängen

© 2012 Burkhard Stiller

Entwurf von Schaltnetzen (2)

- Teil 2: Ökonomische Kriterien
  - Geringe Kosten für den Entwurf (Entwurfsaufwand), z.B. Lohnkosten, Kosten für Rechnerbenutzung zur Entwurfsunterstützung
  - Geringe Kosten für die Realisierung (Realisierungsaufwand), z.B. Kosten für die eingesetzten Bauelemente (bei der Herstellung integrierter Schaltkreise wird die Realisierung auf einer möglichst kleinen Chipfläche gefordert)
  - Geringe Kosten für Inbetriebnahme, laufenden Betrieb, z.B. Test, Wartung

© 2012 Burkhard Stiller

Entwurf von Schaltnetzen (3)

- Grenzen zwischen technischen und ökonomischen Kriterien sind teilweise fließend.

- Einzelne Kriterien stehen auch im Widerspruch zueinander.
  - z.B. Erhöhung der Zuverlässigkeit ⇒ Erhöhung der Kosten
    geringere Realisierungskosten ⇒ höhere Entwurfskosten

➔ Aufgabe des Entwerfers besteht darin, für eine bestimmte Problemstellung den günstigsten Kompromiss zu finden.

- Ziel des Entwurfs: Unter Einhaltung bestimmter technischer Kriterien vor allem einen günstigen Kompromiss bezüglich der ökonomischen Kriterien anzustreben, um so zu einem Minimum an Gesamtkosten zu gelangen.

© 2012 Burkhard Stiller

Minimierungsverfahren

- Grundlage:
  - Realisierung der Schaltnetze in zweistufiger Form
- Darstellungsform, deren Realisierung die geringsten Kosten verursacht, bezeichnet man als
  - Minimalform
- Der Vorgang der Erzeugung einer Minimalform wird als
  - Minimierung bezeichnet.
- Es gibt drei Arten von Minimierungsverfahren:
  - Algebraische Verfahren
  - Graphische Verfahren
  - Tabellarische Verfahren
- Algebraische und graphische Verfahren eignen sich nur für Funktionen mit bis zu 5/6 Variablen, danach werden sie zu unübersichtlich. Danach wendet man tabellarische Verfahren an.

© 2012 Burkhard Stiller

Praktische Einordnung

Aufgabenstellung	Primterme	Auswahl
Variablenanzahl ≤ 6	KV-Diagramm	KV-Diagramm Überdeckungstabelle
Geg. DF(KF) Ges. DMF(KMF) [Disj./Konj. Minimalform]	Consensus Quine-McCluskey	Überdeckungstabelle
Geg. DF(KF) Ges. KMF(DMF) [Disj./Konj. Form]	Nelson	Überdeckungstabelle

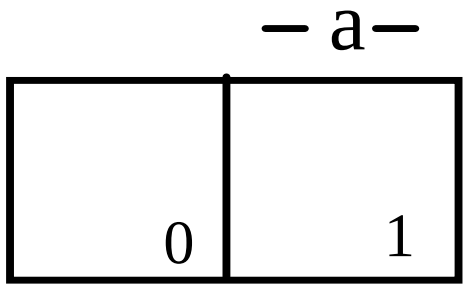
Für erweiterte/leistungsfähigere Verfahren wird auf die Literatur verwiesen!

© 2012 Burkhard Stiller

Graphische Verfahren

- Das KV-Diagramm (nach Karnaugh und Veith)
  - Auch oft nur Karnaugh map, Karnaugh-Diagramm

- Ausgangspunkt ist ein Rechteck, dessen rechte Hälfte der Variablen a und dessen linke Hälfte $\overline{a}$ zugeordnet wird:



KV-Diagramm für eine Variable

KV-Diagramm (1)

- Die Zahl in den Feldern gibt den Index der Variablenbelegung an:
  - Index des Minterms, der dort den Wert 1 annimmt.

- Durch Eintragen der Wahrheitswerte 0 oder 1 in die Felder des KV-Diagramms wird eine Boolesche Funktion charakterisiert.

- Das KV-Diagramm ist eine weitere Darstellungsform Boolescher Funktionen (Alternative zur Funktionstabelle).

y:

	$\bar{a}$
	0_0 | 1_1

$y = a$

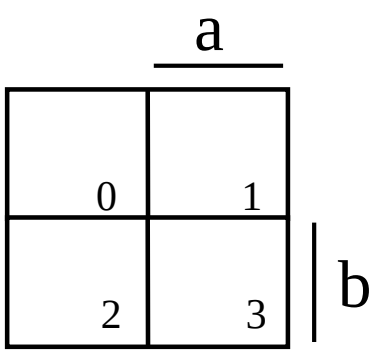
z:

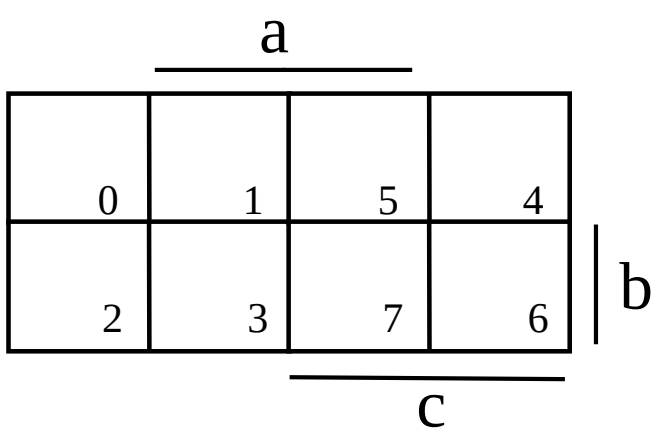
	$\bar{a}$
	1_0 | 0_1

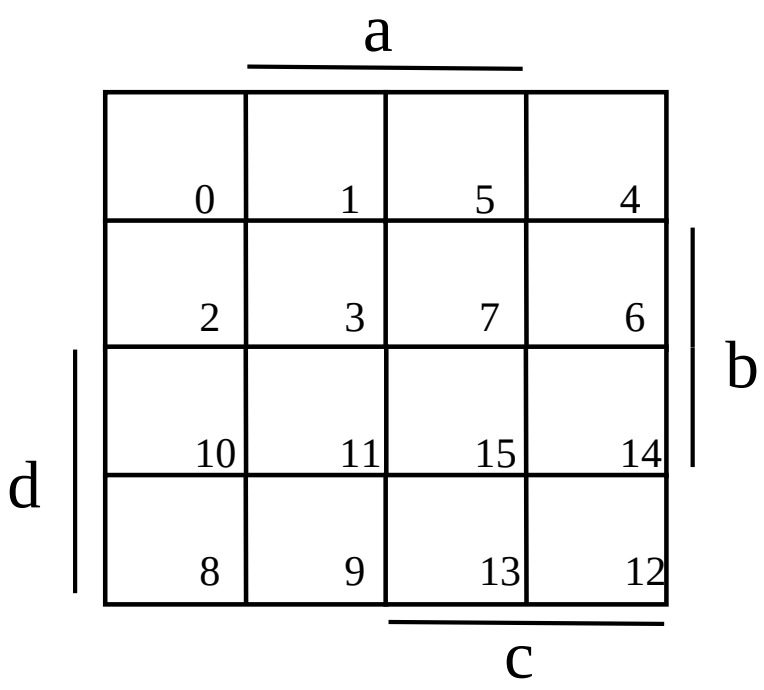
$z = \bar{a}$

KV-Diagramme (2)

- KV-Diagramme für mehrere Variable erhält man durch Spiegelung (für jede neue Variable verdoppelt sich die Anzahl der möglichen Belegungen)

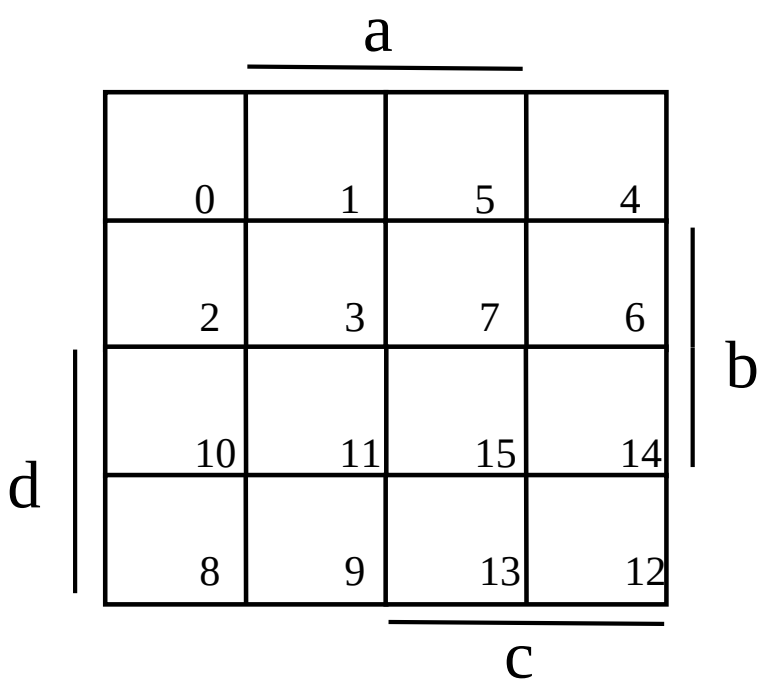






KV-Diagramme (3)

- Jedes Feld hat eine eindeutige Variablenzuordnung, die an den Rändern abgelesen werden kann:
  - Feld 11 hat die Zuordnung: a b $\overline{c}$ d.
- Der Index in den Feldern gibt den Index der zum Feld gehörenden Variablenbelegung an (Variablen in umgekehrter alphabetischer Reihenfolge angetragen).
  - Feld 11 = 1011_2 = d $\overline{c}$ b a



KV-Diagramme — Erstellung (1)

- Funktion sei in Tabellenform gegeben:
  - Jede Zeile der Funktionstabelle entspricht einem Feld im KV-Diagramm.

  ⇒ Für jede Zeile der Funktionstabelle sucht man das zugehörige Feld im KV-Diagramm und trägt den Funktionswert ein.

- Trick, um das Auffinden der Felder im KV-Diagramm zu erleichtern:
  - Man schreibt die Eingangsvariablen in „umgekehrter alphabetischer Reihenfolge“ in die Tabelle.
  - Dann kann das KV-Diagramm gemäß der Indizierung seiner Felder mit den Werten ausgefüllt werden, welche die Tabelle beim Durchlaufen von oben nach unten liefert.

© 2012 Burkhard Stiller

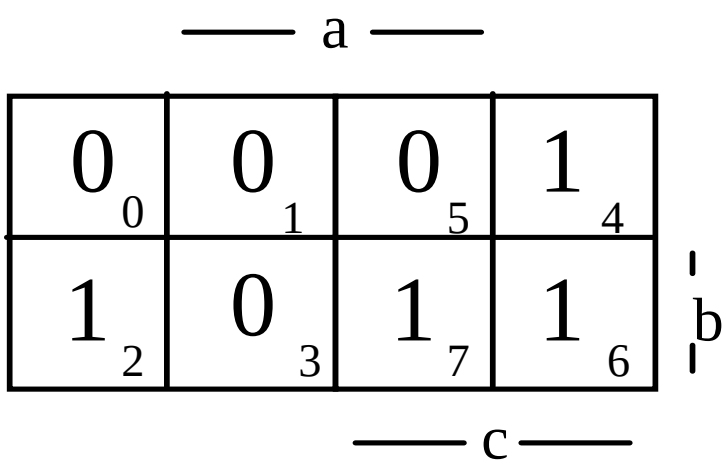
KV-Diagramme — Erstellung (2)

Beispiel: $y = \overline{a}\, b \vee b\, c \vee \overline{a}\ \overline{b}\, c$

Funktionstabelle:

Index	c	b	a	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Damit ergibt sich das folgende KV-Diagramm:

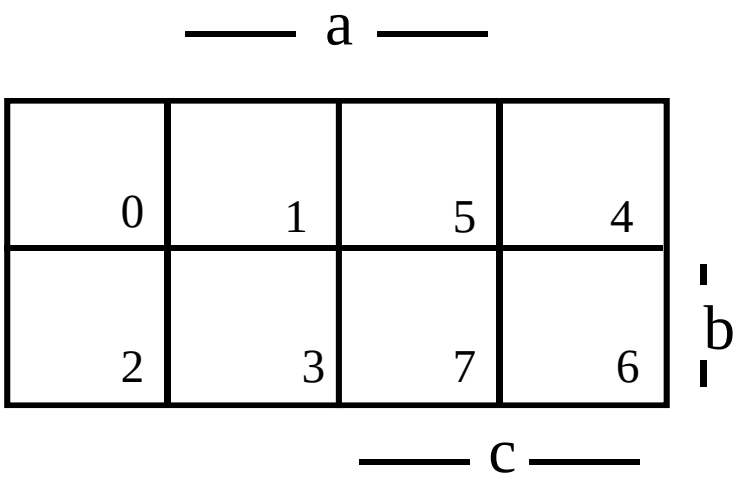


© 2012 Burkhard Stiller

Eigenschaften der KV-Diagramme (1)

- Wesentliche Eigenschaft:
  - Symmetrisch zu einer Achse liegende Minterme unterscheiden sich lediglich in einer Variablen.

- Beispiel:



Minterm 0 = $\overline{c}\ \overline{b}\ \overline{a}$
Minterm 1 = $\overline{c}\ b\ a$

oder

Minterm 0 = $\overline{c}\ \overline{b}\ \overline{a}$
Minterm 4 = $c\ \overline{b}\ \overline{a}$

oder

Minterm 1 = $\overline{c}\ \overline{b}\ a$
Minterm 3 = $\overline{c}\ b\ a$

© 2012 Burkhard Stiller

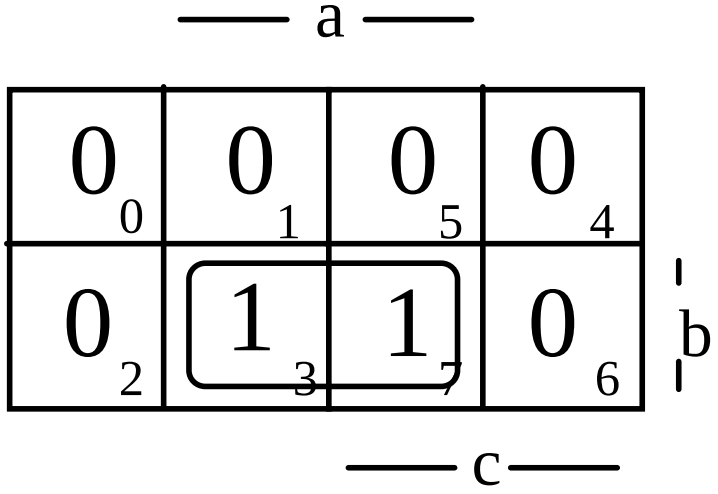
Eigenschaften der KV-Diagramme (2)

- Nach den Regeln der Booleschen Algebra lassen sich Terme, die sich nur in einer Variablen unterscheiden, zusammenfassen:
- Beispiel:

$$a\ b\ c \vee a\ b\ \overline{c} = a\ b\ (c \vee \overline{c})$$
$$= a\ b$$

- Es entsteht ein Term ohne diese Variable.

- Symmetrisch zu den Achsen des KV-Diagramms liegende Minterme lassen sich zu einem einfacheren Term zusammenfassen.



Definition: Primimplikant

- Ein Implikant p ist Primimplikant, falls es keinen Implikanten q ≠ p gibt, der von p impliziert wird

  $\forall q: \quad q \neq p \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$

- *d.h.*, p ist von größtmöglicher Ordnung (p umfasst einen maximal großen Einsblock).

- Es gilt:
  Jede Funktion ist als Disjunktion ihrer Primimplikanten darstellbar.

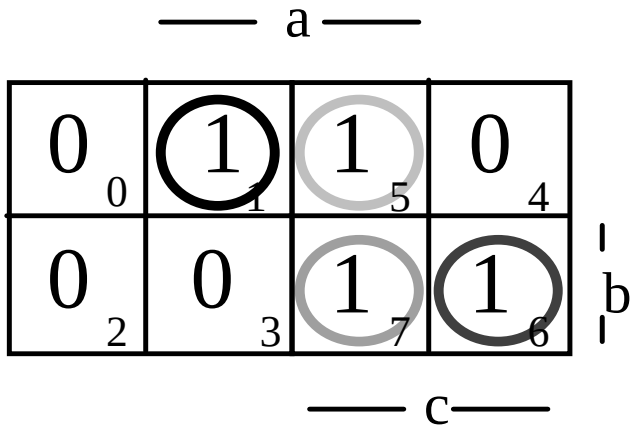
Herauslesen der Primimplikanten

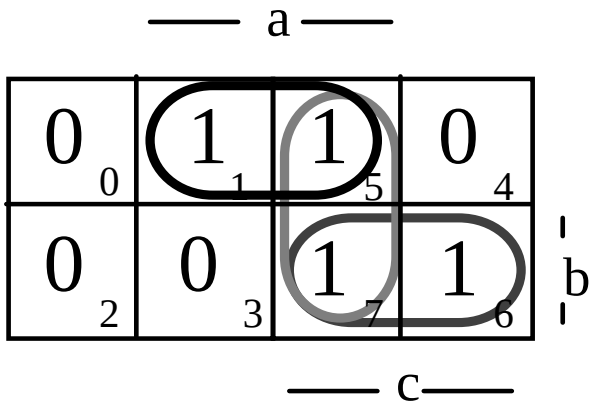
- Herauslesen der Primimplikanten aus dem KV-Diagramm:
  - Man versucht, möglichst große Blöcke von Einsen im Diagramm zu finden, wobei jeder Einsblock 2^k Felder umfassen muß.

Beispiel:

$$f = \overline{a}\ b\ c \vee a\ c \vee a\ \overline{b}\ \overline{c}$$

Beispiel





Vier Minterme:
($a\ \bar{b}\ \bar{c}$, $a\ \bar{b}\ c$, $a\ b\ c$, $\bar{a}\ b\ c$)

Drei Primimplikanten:

Implikanten erster Ordnung
($a\ \bar{b}$, $a\ c$, $b\ c$)

Aber: ($a\ \bar{b}$, $b\ c$) genügen eigentlich!

- $f = a\ \bar{b}\ \bar{c} \vee a\ \bar{b}\ c \vee a\ b\ c \vee \bar{a}\ b\ c$
  $= a\ \bar{b} \vee a\ c \vee b\ c = a\ \bar{b} \vee b\ c$

© 2012 Burkhard Stiller

Herauslesen einer Funktion

Auffrischung:

- Definition:

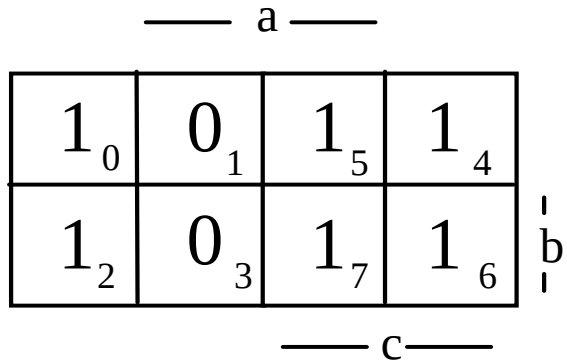
  Es sei $D(x_1,...,x_m)$ eine Disjunktion von Literalen
  $\bigvee L_i = L_1 \vee \ldots \vee L_m$ oder die Konstante „0“ oder „1“
- Der Term $D(x_1,...,x_m)$ heißt Implikat einer Booleschen Funktion $y(x_1,...,x_m)$ [f Funktion von x_i],
  wenn $D \rightarrow y$ [y Produktterm aus Literalen dieser x_i]
- Das heißt für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt:
  Wenn D(B) = 0, dann ist auch y(B) = 0.

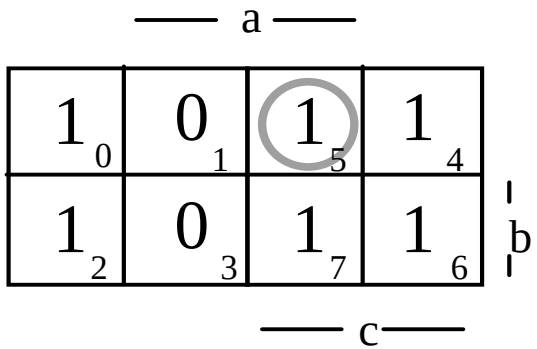
- y ist Implikant von y, wenn y die Funktion y impliziert, d.h. wenn die Menge aller Einsstellen von y in der Menge aller Einsstellen von y enthalten ist.

Beispiel (1)

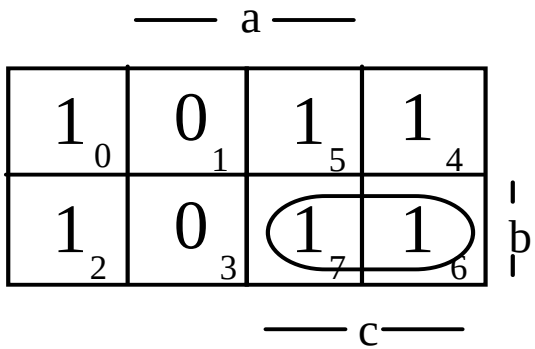
Beispiel: f = Minterme (0,2,4,5,6,7)

f :

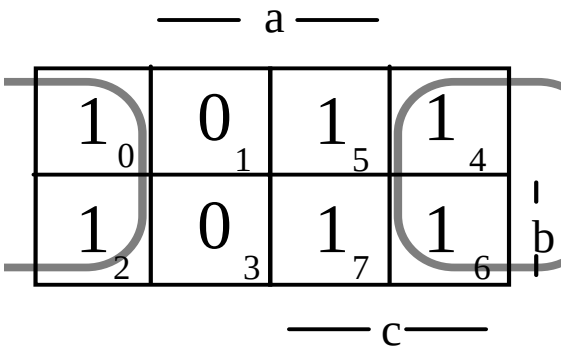




$g = a \bar{b} c$
ist Implikant



$g = b c$
ist Implikant



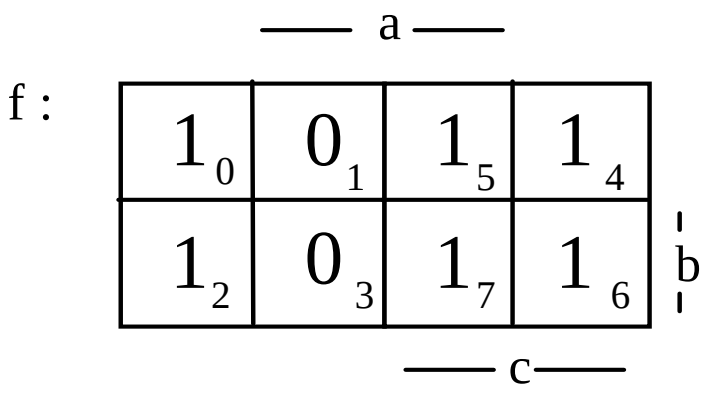
$g = \bar{a}$
ist Implikant

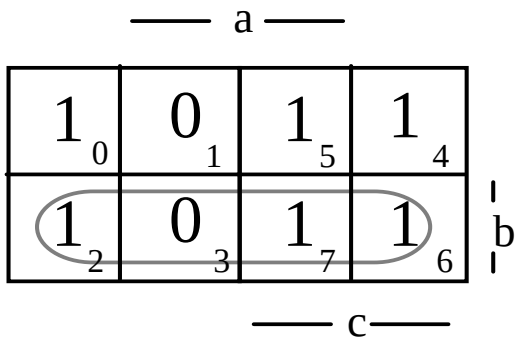
© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel (2)

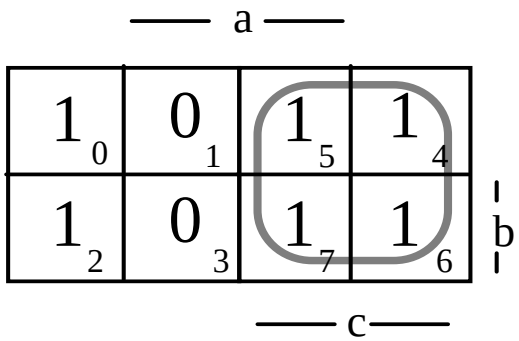
Beispiel: f = Minterme (0,2,4,5,6,7)

f :

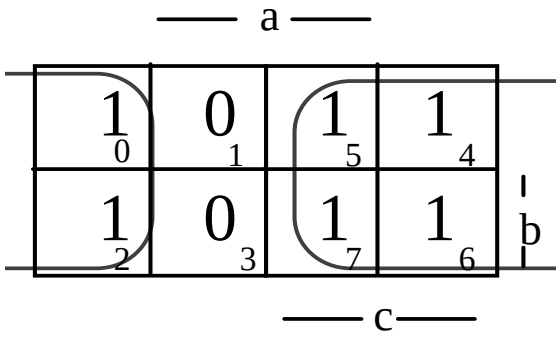




g = b
ist KEIN Implikant



g = c
ist Implikant



g = $\bar{a} \vee c$
ist KEIN Implikant

(Impl.)

Implementation von Funktionen

- Implementation regelmäßig wiederkehrender Funktionen.

  Zwei Varianten werden diskutiert:
  - Über Multiplexer/Demultiplexer
  - Speicher

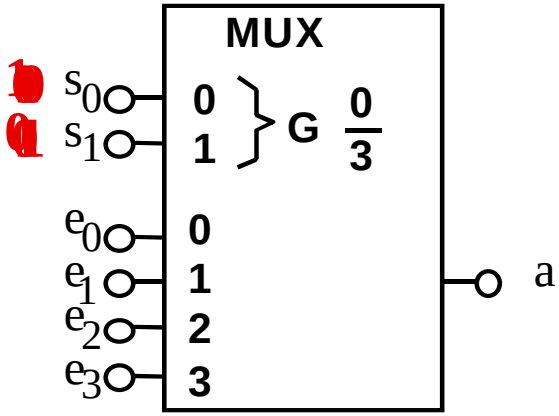
- Ein Multiplexer (Abkürzung: MUX) ist ein Baustein mit mehreren Eingängen und einem Ausgang, wobei über n Steuerleitungen einer der 2^n Eingänge auf den Ausgang geschaltet wird.

- Multiplexer werden nach ihrer Größe als 2^n:1 - Multiplexer (alternativ als 1-aus-2^n- Multiplexer) klassifiziert.

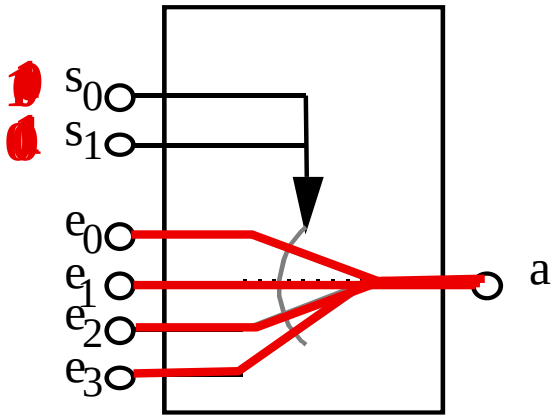
© 2012 Burkhard Stiller

1-aus-4-Multiplexer

- Schaltbild und logisches Verhalten:



s_1	s_0	a
0	0	e_0
0	1	e_1
1	0	e_2
1	1	e_3



© 2012 Burkhard Stiller

Logische Funktionen mit Multiplexern

- Ein Multiplexer kann nicht nur zur Steuerung von Datenflüssen sondern auch zur Realisierung logischer Funktionen verwendet werden.

- Man kann mit einem 2^n: 1 - Multiplexer eine logische Funktion mit n+1 Variablen implementieren.

- Hierzu wird die sog. Implementierungstabelle verwendet.

© 2012 Burkhard Stiller

Implementierungstabelle

- Die Tabelle besteht aus:
  - 2^n Spalten für die möglichen Belegungen der n Steuereingänge
  - 2 Zeilen für die negierte und nicht negierte (n+1)-te Variable

- In die Tabelle werden die Funktionswerte in Abhängigkeit von den Variablen eingetragen.

- Anschließend betrachtet man jede Spalte für sich und ordnet ihr eine einstellige Funktion $g \in \{0, 1, a, \overline{a}\}$ zu, mit der dann der Eingang belegt wird, der zu der entsprechenden Steuervariablenkombination gehört.

© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel

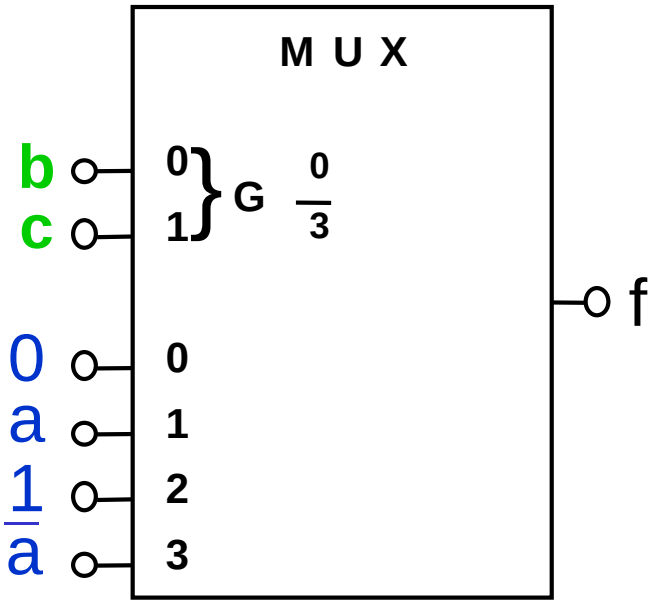
Realisierung einer Funktion mit Multiplexer:

$$f = \bar{a}\, c \vee \bar{b}\, c \vee a\, b\, \bar{c}$$

Implementierungstabelle bei Wahl von b und c als Steuereingänge:

c b	0 0	0 1	1 0	1 1
a = 0	0	0	1	1
a = 1	0	1	1	0
f =	0	a	1	$\bar{a}$

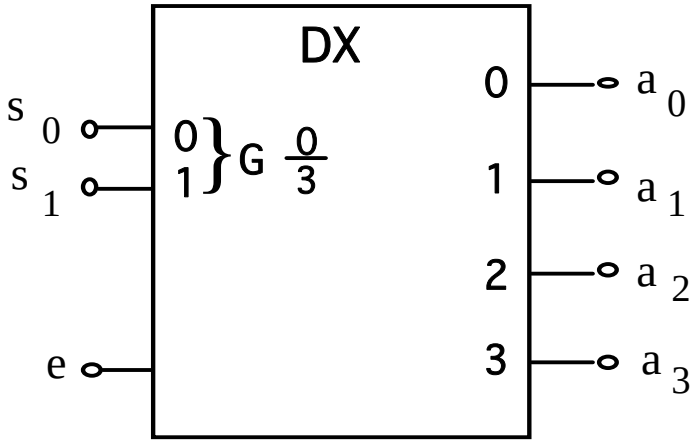
Realisierung



Demultiplexer/Dekoder (1)

- Der zum Multiplexer korrespondierende Baustein, der einen Eingang abhängig von n Steuerleitungen auf einen von 2^n Ausgängen schaltet, heißt Demultiplexer.

- Beispiel:



s_1	s_0	a_0	a_1	a_2	a_3
0	0	e	0	0	0
0	1	0	e	0	0
1	0	0	0	e	0
1	1	0	0	0	e

Schaltbild und logisches Verhalten eines 1-auf-4-Demultiplexers

© 2012 Burkhard Stiller

Demultiplexer/Dekoder (2)

- Man beachte:
  - der Demultiplexer hat einen Enable-Eingang e sowie n Eingänge s_i für eine Dualzahl, die an den 2^n Ausgängen a_j dekodiert bereitgestellt wird.

- Enable-Eingang e = 0, dann liegen alle Ausgänge auf 0
  ansonsten wird eine 2-bit-Zahl dekodiert,
  z.B. wird bei Anlegen der Zahl 2 (s_1= 1, s_0= 0)
  der Ausgang a_2= 1 und alle anderen Ausgänge bleiben 0.

- Der Demultiplexer wird deshalb auch Dekoder genannt.

(Speich.)

© 2012 Burkhard Stiller

Realisierung mittels Speicherbausteinen

- Bei den bisher behandelten Bausteinen (Gatter, Multiplexer, Dekoder) war die Funktion fest vorgegeben.

  ➔ festverdrahtete Logik

- Höherintegrierte Verknüpfungsbausteine müssen die Flexibilität bieten, an viele verschiedene Anwendungen anpaßbar zu sein. Diese Anpassung wird als Personalisierung oder als Programmierung bezeichnet.

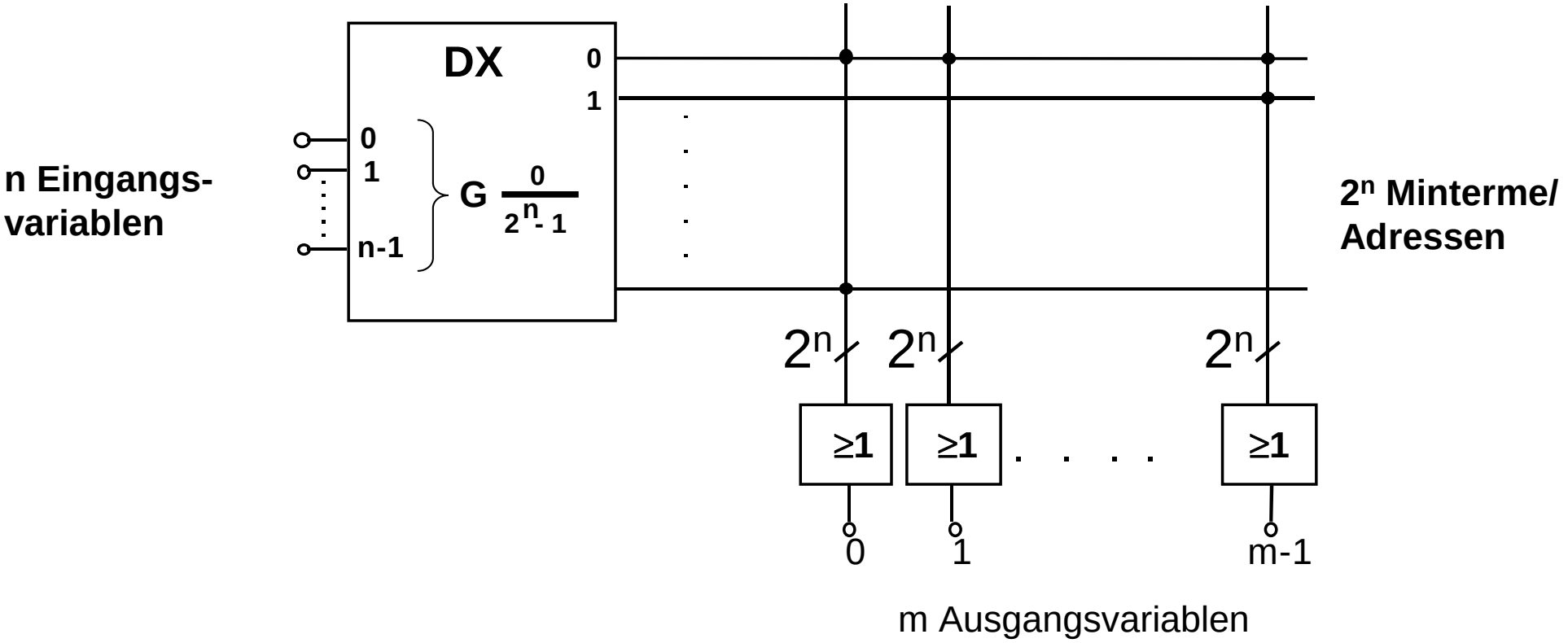
  ➔ mikroprogrammierte Logik

  (siehe M6 für entsprechende CPUs)

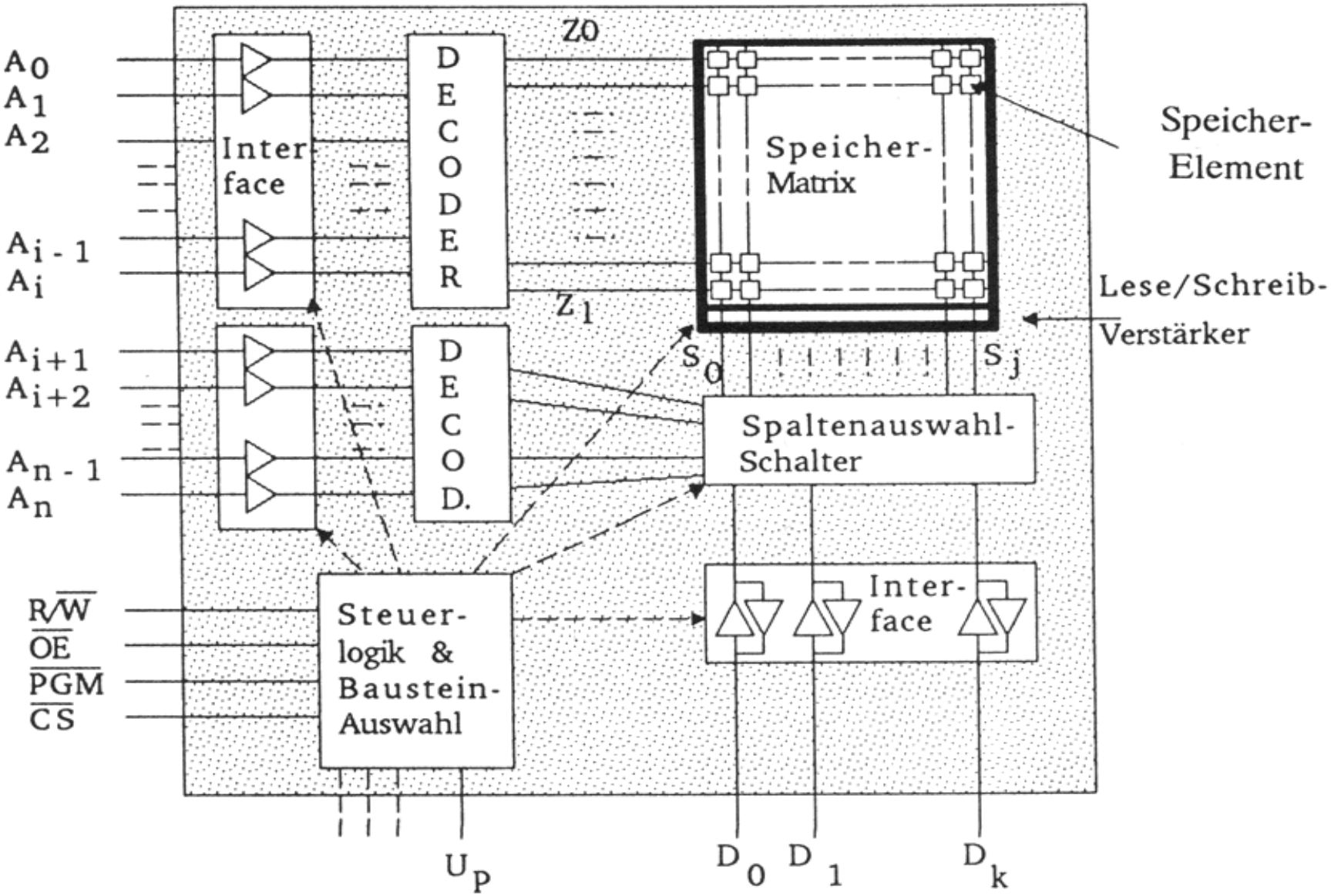
© 2012 Burkhard Stiller

Schematischer Aufbau eines Speicherbausteins

Speicheranordnung, in der beliebige Funktionstabellen abgelegt werden.



Organisation von Speicherbausteinen



© 2012 Burkhard Stiller

ifi

Erläuterung zum Speicherbaustein

- Durch das Anlegen von Eingangssignalen wird eine Speicherzelle ausgewählt (adressiert) und der dort gespeicherte Funktionswert an den Ausgängen zur Verfügung gestellt.

- Die Leitungen, die den Dekoder verlassen, entsprechen also den Mintermen von n Eingangsvariablen, also den Zeilen der Funktionstabelle.

- Das Speichern einer 1 für eine bestimmte Ausgangsvariable i bedeutet, daß dieser Minterm in die ODER-Verknüpfung am i-ten Ausgang einbezogen wird, eine 0 heißt, daß der Minterm nicht benutzt wird.

© 2012 Burkhard Stiller

Speichertypen (1)

- Je nach Personalisierung des Speicherbausteins unterscheidet man verschiedene Speichertypen.

- ROM (Read Only Memory):

- Speicherbausteine, auf die nur lesend zugegriffen werden kann. Programmierung beim Hersteller (maskenprogrammierbare ROMs), wird während der ganzen Lebenszeit des Bausteins beibehalten.

© 2012 Burkhard Stiller

Speichertypen (2)

- PROM (Programmable Read Only Memory):

- Programmierbare ROMs, die erst vom Benutzer programmiert werden.

- Programmierung:
  - Durchbrennen von mikroskopisch kleinen Verbindungen (engl.: fusible link)
  - Auf den Baustein aufgebrachte Ladungen, die über Jahre hinweg durch physikalische Prozesse festgehalten werden (engl.: stored charge).

© 2012 Burkhard Stiller

Speichertypen (3)

- EPROM (Erasable Programmable Read Only Memory):

- Ein benutzerprogrammierbarer Speicherbaustein, durch UV-Licht wieder löschbar und dann neu programmierbar.

- Quarzfenster auf der Bausteinoberfläche.

- Es gibt auch Speicherbausteine, die elektrisch (durch das Anlegen höherer Spannungen) gelöscht werden können
  - EEPROM: Electrically Erasable PROM
  - EAROM: Electrically Alternable ROM.
  - Anwendung z.B. Speicher bei Digitalkameras (Compact Flash, Memory Stick)

© 2012 Burkhard Stiller

Speichertypen (4)

- RAM (Random Access Memory):

- Speicher, auf die während des Normalbetriebs lesend und schreibend zugegriffen werden kann.

- Ein RAM-Baustein verliert seine Programmierung, wenn er von der Spannungsversorgung abgetrennt wird.

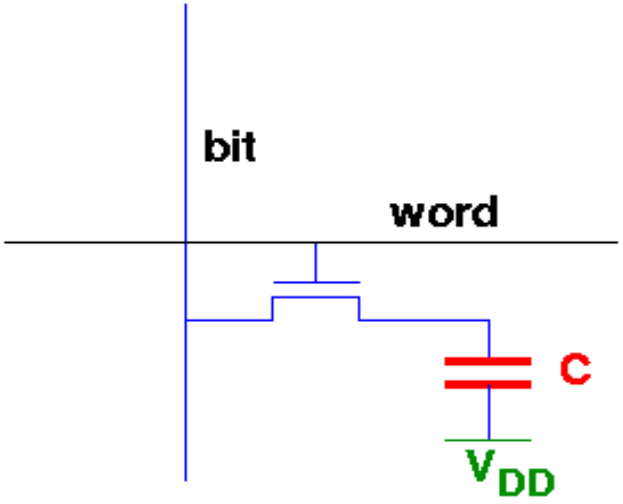
- Man unterscheidet :
  - Dynamische RAM-Bausteine (DRAM)
  - Statische RAM-Bausteine (SRAM).

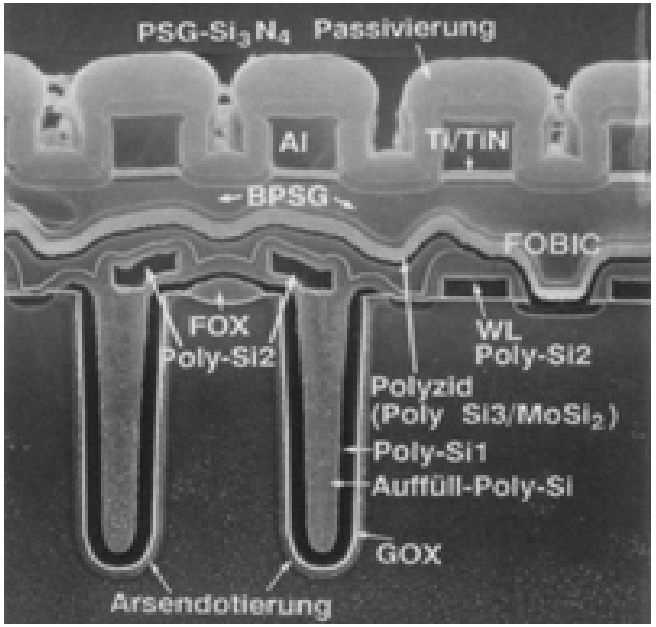
© 2012 Burkhard Stiller

Dynamische RAM-Bausteine (DRAM)

- Ein Kondensator dient als Ladungsspeicher, und ein Transistor wird zum Ankoppeln an diesen Ladungsspeicher benötigt.

- Der Speicherinhalt muß in regelmäßigen Zeitabständen „aufgefrischt" werden (memory refresh).

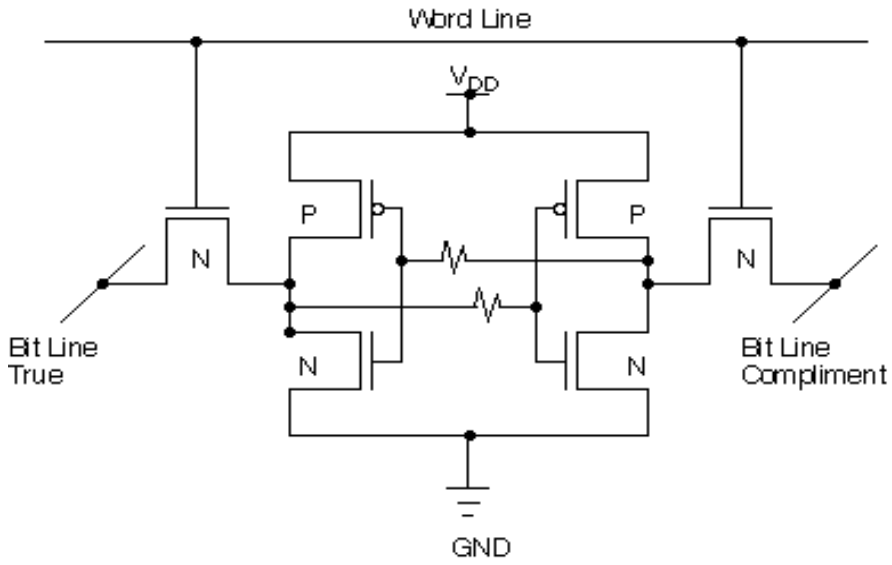


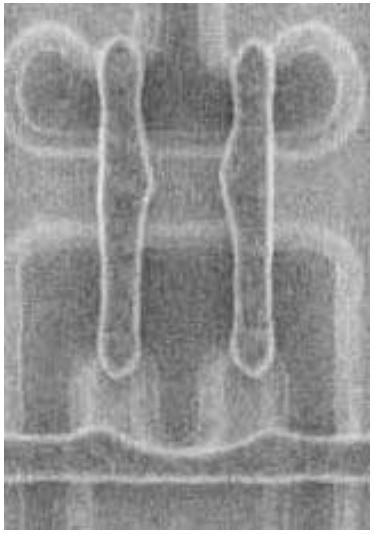


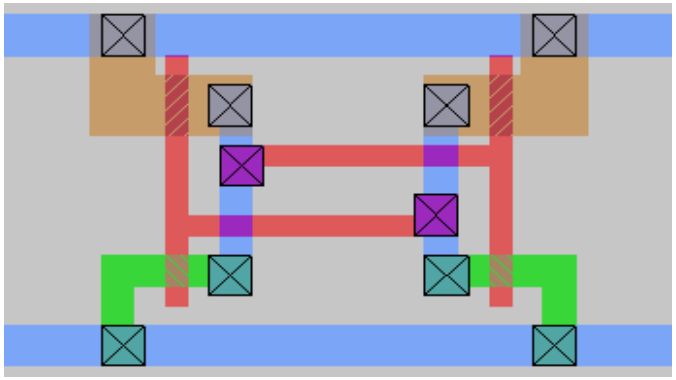
© 2012 Burkhard Stiller

Statische RAM-Bausteine (SRAM)

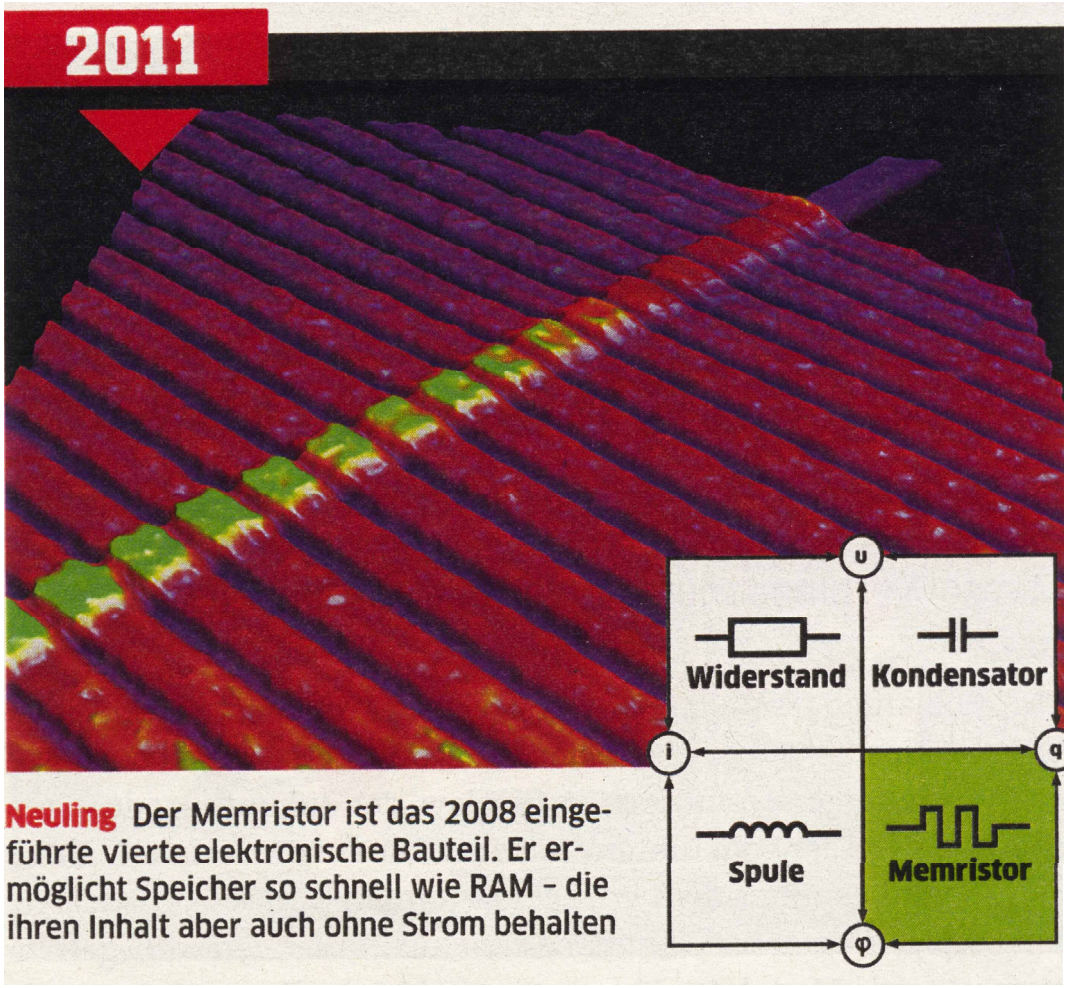
- Als Speicherzelle wird ein Flipflop verwendet (Erklärung folgt in Modul 4).
  - Die Speicherzelle hält ihre Programmierung auch ohne Regeneration.
  - Die Zugriffszeit bei einem statischen RAM ist wesentlich kürzer als bei einem dynamischen RAM.
  - Eine statische Speicherzelle benötigt etwa 6 bis 8 Transistoren, eine dynamische dagegen deutlich weniger (z.B. ein Transistor).

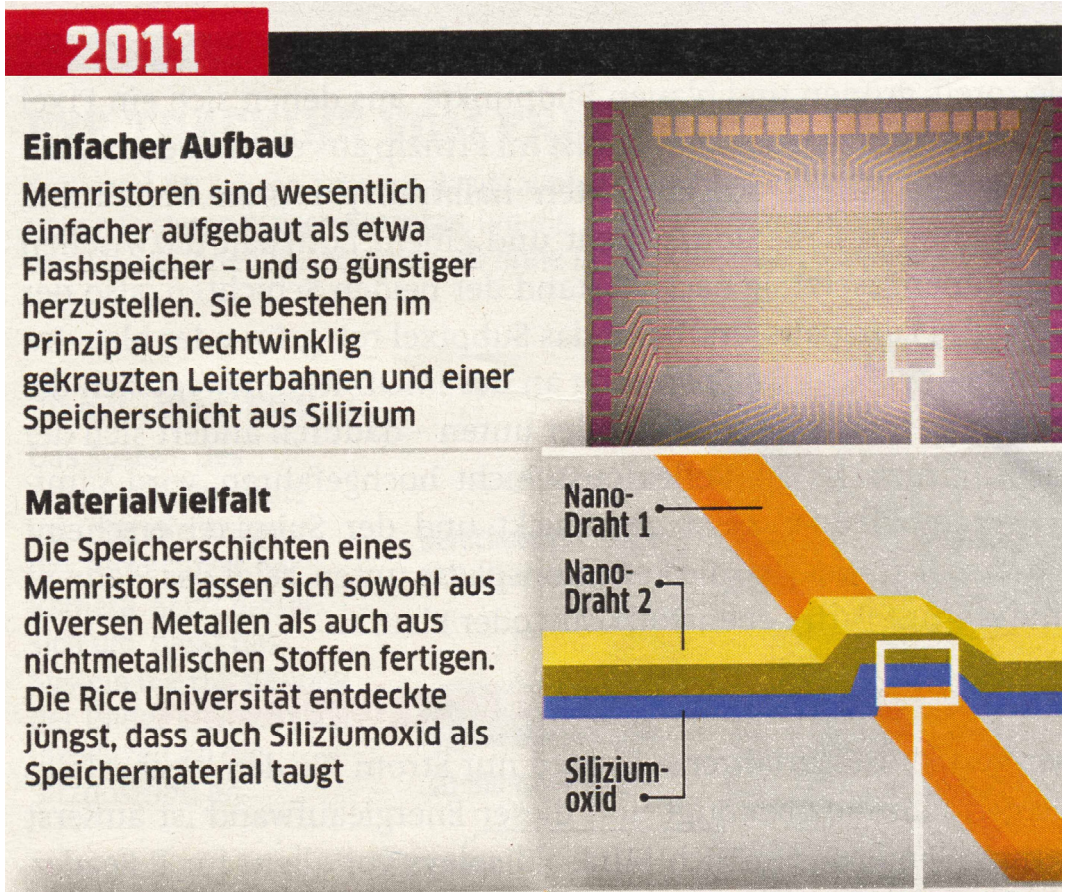






Memresistor





© 2012 Burkhard Stiller

ifi

Gegenüberstellung von RAMs und ROMs

- Unterschiede zwischen RAMs und ROMs betreffen vor allem:
  - Lese-/Schreib-Möglichkeiten (RW; *read-write*)
  - Zugriffszeiten (ZZ; für R/W)
  - Speicherpermanenz ohne Spannungsversorgung (SP)
  - Realisierbare Speichergröße (SG)

	ROM	PROM	EPROM	Flash-PROM	DRAM	SRAM
RW	R	R	R ((W))	R (W)	RW	RW
ZZ	+	+	+ / –	+ / –	++	+++
SP	+	+	+	+	–	–
SG	+	+	+	+	+	+

PLA (Programmable Logic Array)

- Bisher wurde die gesamte Funktionstabelle in einem Speicherbausteinen abgespeichert und die Funktion durch ihre DNF (Disjunktive Normalform) realisiert.

- Verwendet man stattdessen die DMF (Disjunktive Minimalform), lassen sich Funktionen oft sehr viel kompakter darstellen.

- PLA (Programmable Logic Array):

- Im Unterschied zum ROM werden bei PLA eingangsseitig nicht Minterme, sondern Primimplikanten der Minimalüberdeckung erzeugt.
- Dazu wird der Dekoder durch eine UND-Matrix ersetzt.

© 2012 Burkhard Stiller

FPLA und PAL

- PLAs werden ähnlich wie ROMs bereits bei der Herstellung personalisiert.
- Ein vom Benutzer zu programmierendes PLA mit fest vorgegebener Anzahl von Eingangsvariablen n, Produkttermen k und Ausgangsvariablen m wird FPLA (field programmable logic array) genannt.
- Alternativ dazu werden PAL-Bausteine (programmable array logic) angeboten, bei denen die UND- bzw. ODER-Matrix bereits in der Herstellung personalisiert wurde.

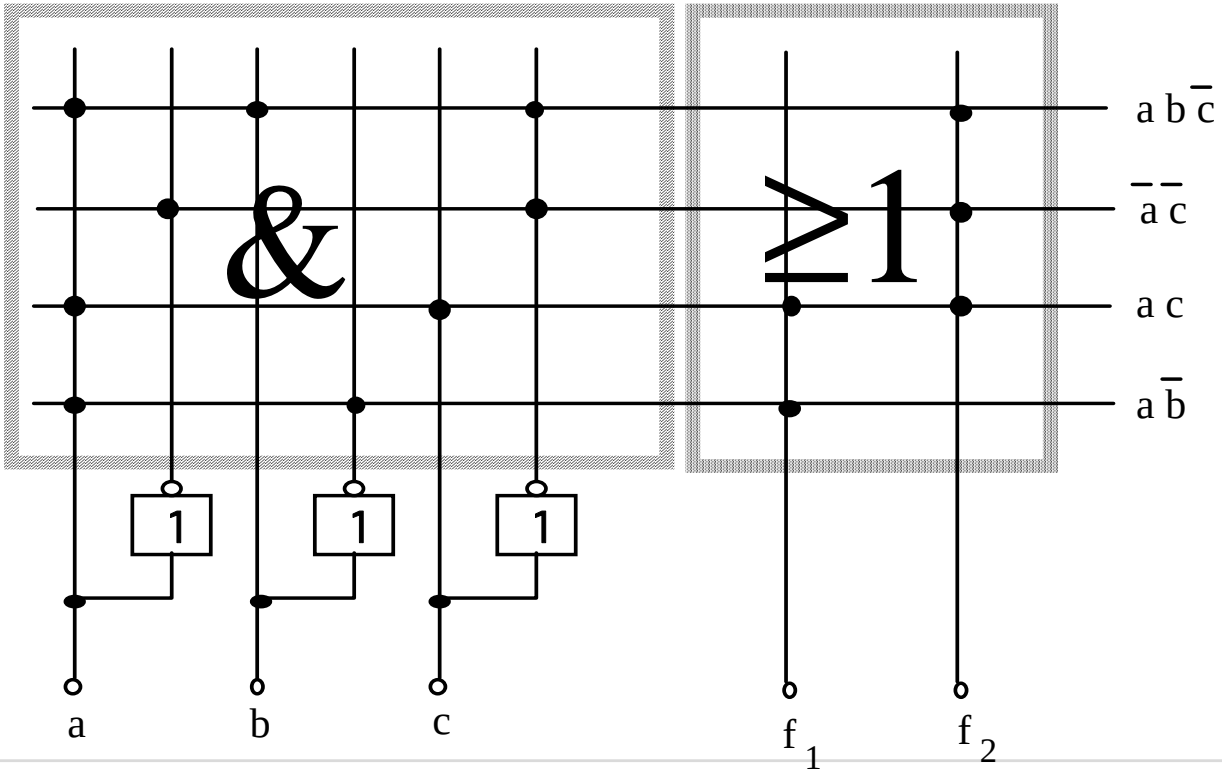
© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel: PAL-Realisierung

Die (schon minimierten) Funktionen

$$f_1 = a\,\bar{b} \vee a\,c \qquad \text{und} \qquad f_2 = \bar{a}\,\bar{c} \vee a\,c \vee a\,b\,\bar{c}$$

sollen mit einem PAL realisiert werden:



© 2012 Burkhard Stiller

Modul 3: Schaltnetze

- Formale Grundlagen logischer Beschreibungen
  - Boolesche Algebra, Schaltalgebra
- Normal- und Minimalformen
- Realisierung von Schaltnetzen auf Schalter- und Gatterebene
- Entwurf von Schaltnetzen
  - Logikminimierung, KV-Diagramme
  - Programmierung von Funktionen
- Laufzeiteffekte bei Schaltnetzen

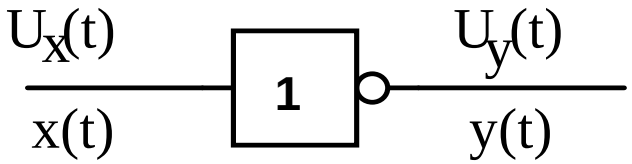
© 2012 Burkhard Stiller

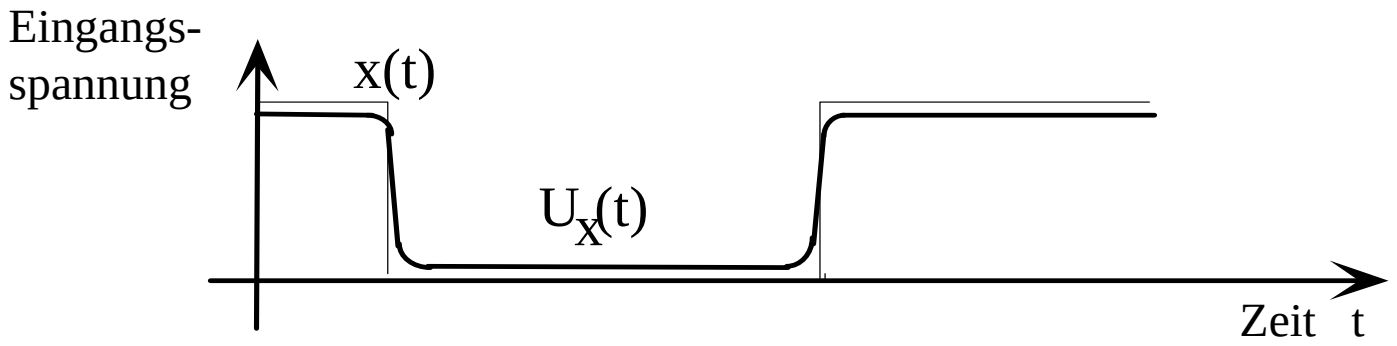
Laufzeiteffekte

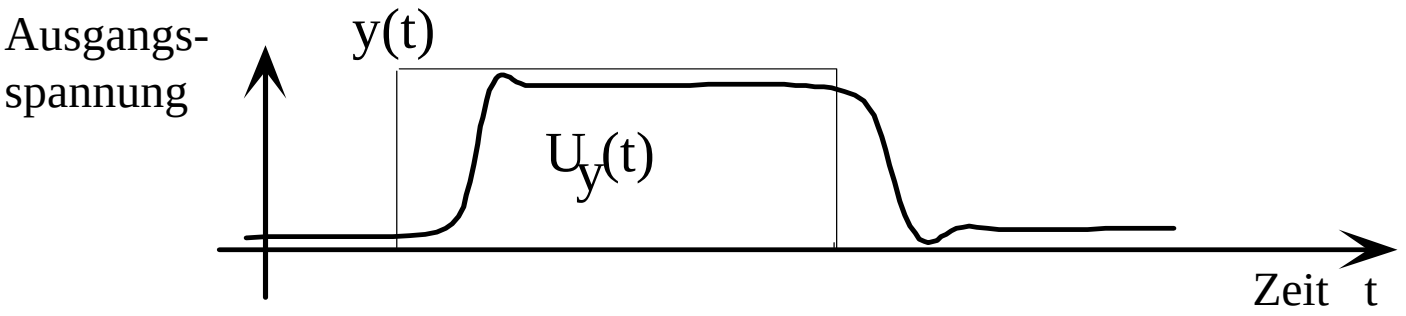
- Auf der Gatterebene wurden die Gatter bisher als ideale logische Verknüpfungen betrachtet.
- In der Realität werden Gatter jedoch z.B. mittels Transistoren, Widerstände, Kapazitäten realisiert (Layoutebene).
- Der zeitliche Signal-Verlauf eines realen Gatters weicht vom Verlauf der idealen booleschen Größen ab.

© 2012 Burkhard Stiller

Realer und idealer Signalverlauf (Inverter)



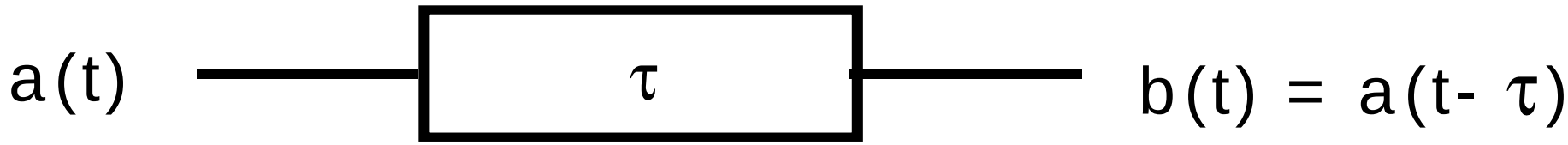




© 2012 Burkhard Stiller

Realistischere Beschreibung von Gattern

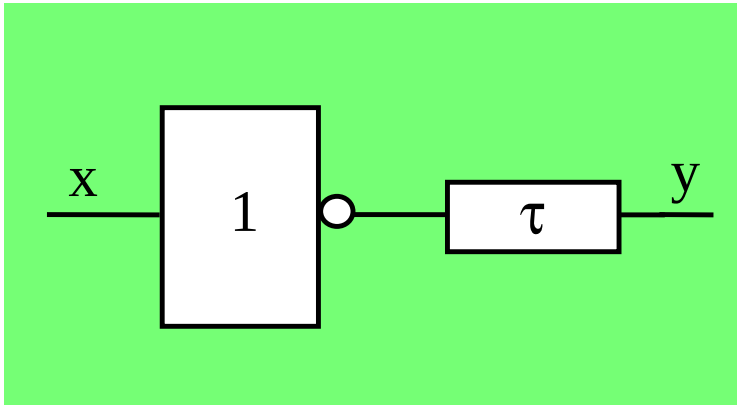
- Um die Effekte auf der Gatterebene annähernd zu beschreiben, gibt es eine Reihe verschieden komplexer Modelle.
- Einfaches Modell: Totzeitmodell
  - Es werden lediglich die durch Gatter und Leitungen entstehenden Totzeiten berücksichtigt.
  - Ein reales Verküpfungsglied (Gatter) wird modelliert durch:
    - Ein ideales Verknüpfungsglied ohne Verzögerungsanteil und
    - Ein Totzeitglied als reines Verzögerungsglied (steht für die Schaltzeit des Gatters und ggf. für Leitungsverzögerungen).
- Das zeitliche Verhalten einer binären Größe hinter einem Totzeitglied ist dasselbe wie dasjenige vor dem Totzeitglied, aber um die Zeit τ versetzt:

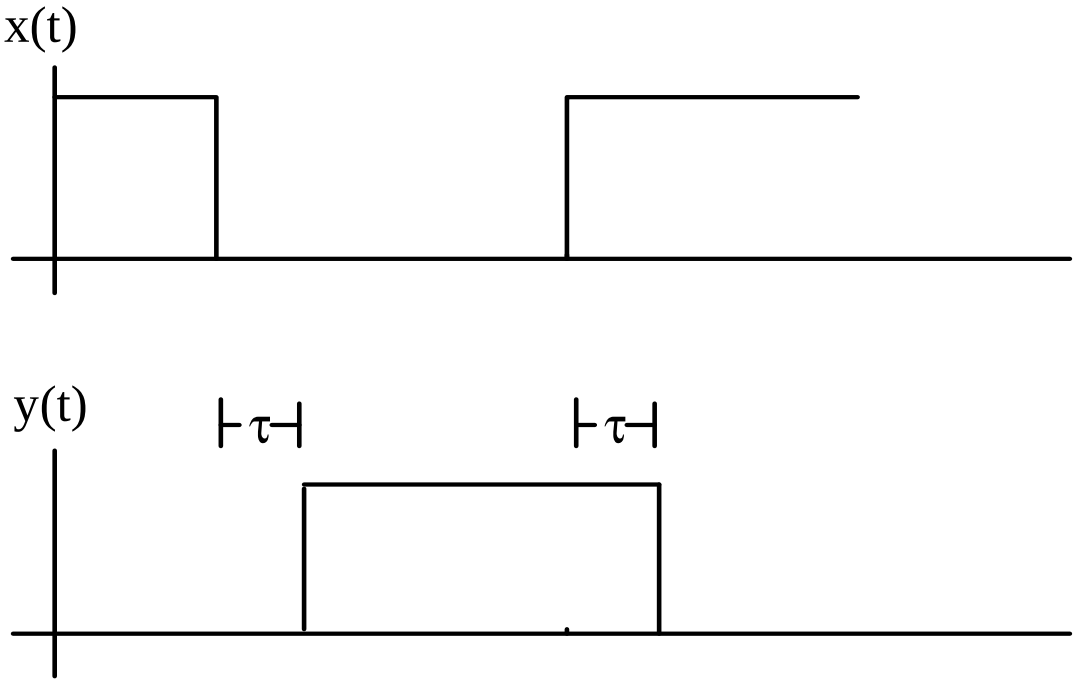


© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel: Totzeitmodell eines Inverters

- Mit Hilfe dieses einfachen Modells lassen sich Laufzeiteffekte bereits sehr gut modellieren (auch wenn dieses Modell noch sehr idealisierend ist!).

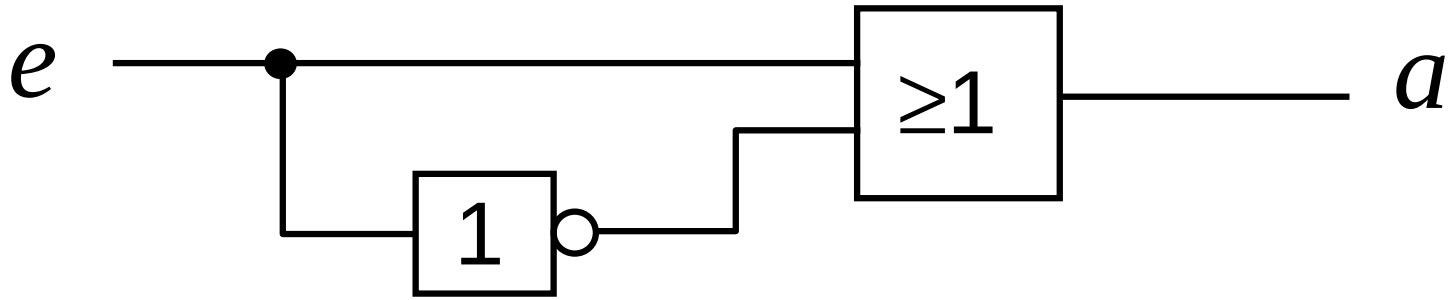




© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel: Inverteranwendung

Gegeben:

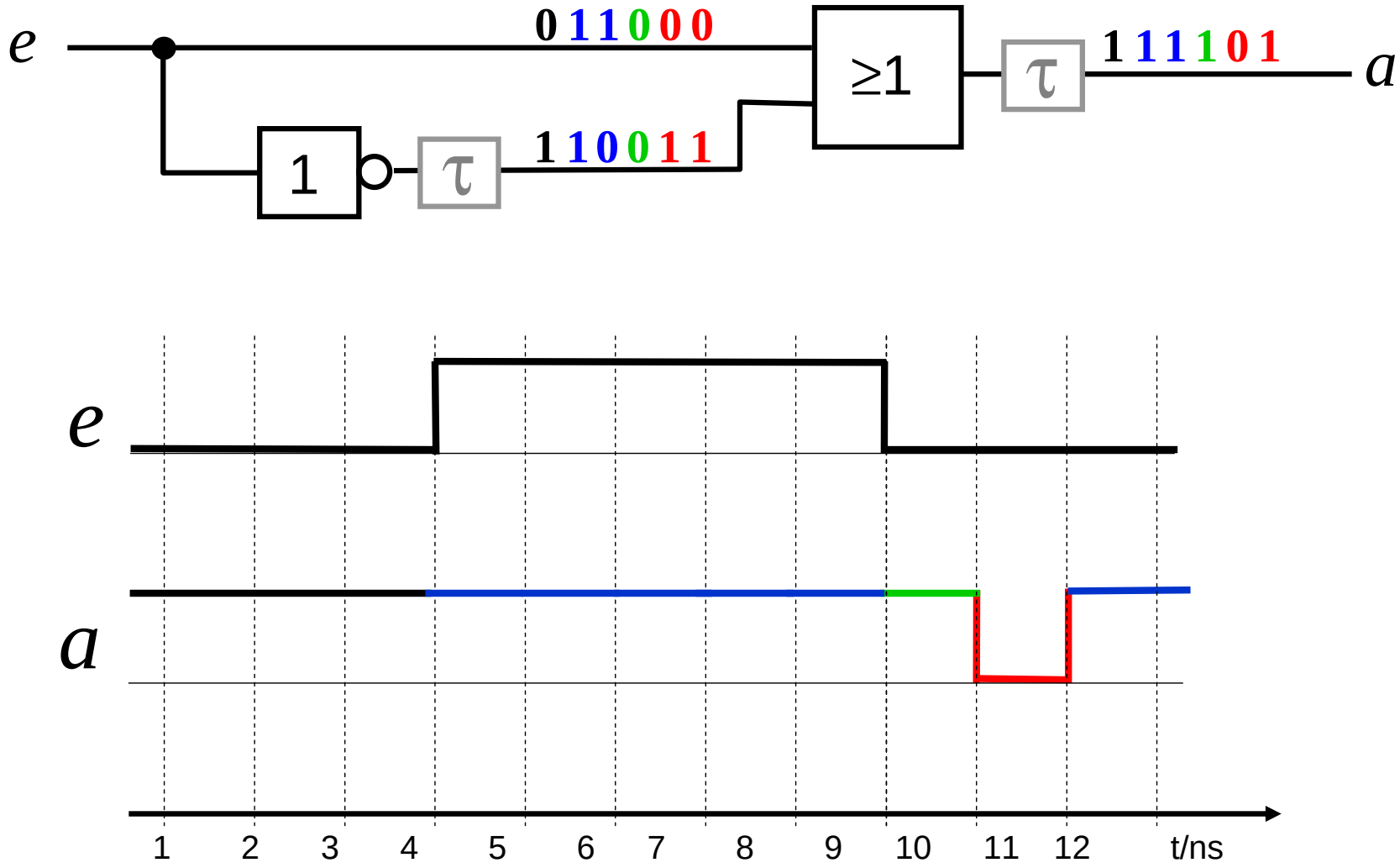


$$a = e \vee \overline{e} = 1$$

Beide Gatter haben eine Verzögerungszeit von 1 ns.

© 2012 Burkhard Stiller

Zeit-Diagramm



Verhalten eines Schaltnetzes bei Änderung der Eingabebelegung (1)

- Ideales Schaltnetz:

- Das Ausgangssignal ändert sich nicht, wenn alte und neue Belegung denselben logischen Verknüpfungswert liefern.

- Das Ausgangssignal ändert sich genau einmal, wenn alte und neue Belegung verschiedene logische Verknüpfungswerte liefern.

© 2012 Burkhard Stiller

Verhalten eines Schaltnetzes bei Änderung der Eingabebelegung (2)

- Reales Schaltnetz:

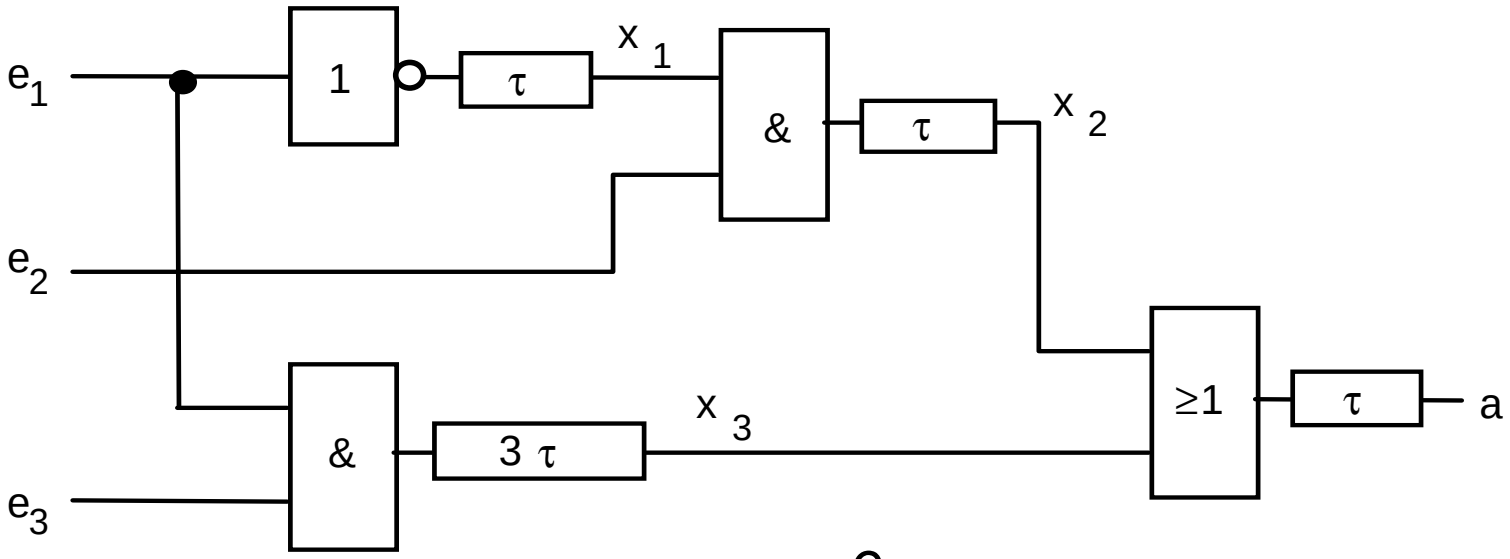
- Die Änderung läuft auf verschieden langen Wegen mit verschiedenen Verzögerungen durch das Schaltnetz.

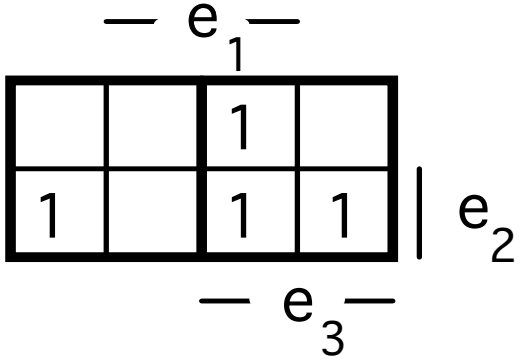
- Mehrfache Änderungen des Ausgangssignals sind möglich, bis sich der stabile Endwert einstellt

  ➔ Hasardfehler

Beispiel

Funktion: $a = \overline{e}_1 e_2 \vee e_1 e_3$





Eingabewechsel

- Es sollen die folgenden Eingabewechsel betrachtet werden:

a) Die Eingänge e_2 und e_3 seien konstant 1,
der Eingang e_1 wechsle von 0 auf 1

b) Die Eingänge e_2 und e_3 seien konstant 1,
der Eingang e_1 wechsle von 1 auf 0

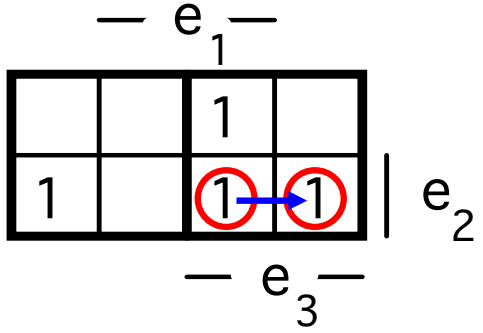
© 2012 Burkhard Stiller

Funktion: $a = \bar{e}_1 e_2 \vee e_1 e_3$

Funktionswerte bei den Übergängen:

$(e_3,e_2,e_1) = (1,1,0) \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$(e_3,e_2,e_1) = (1,1,1) \quad \Rightarrow \quad a = 1$

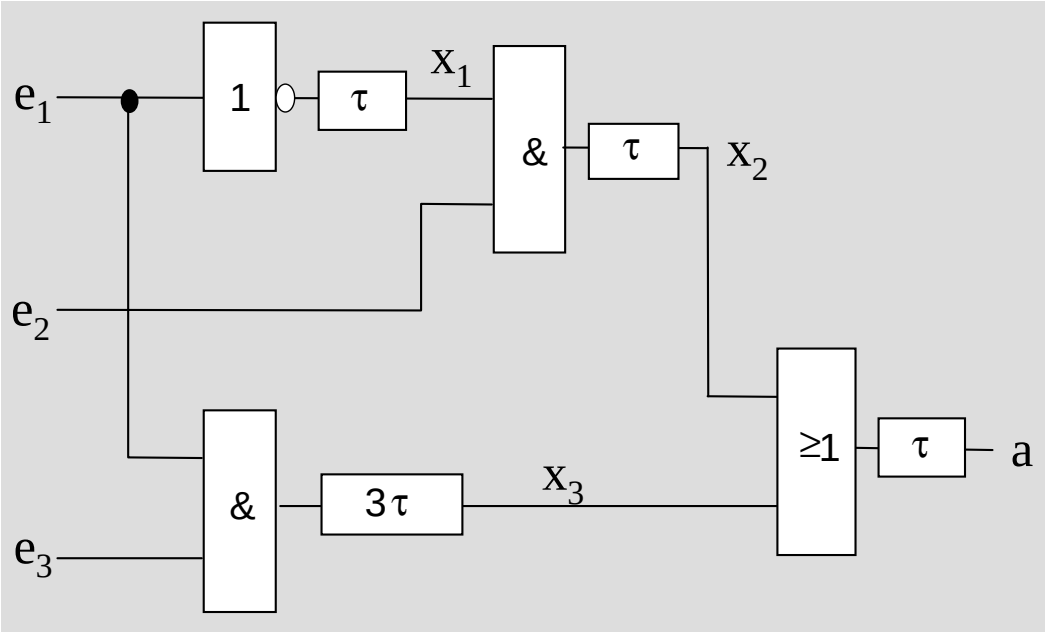


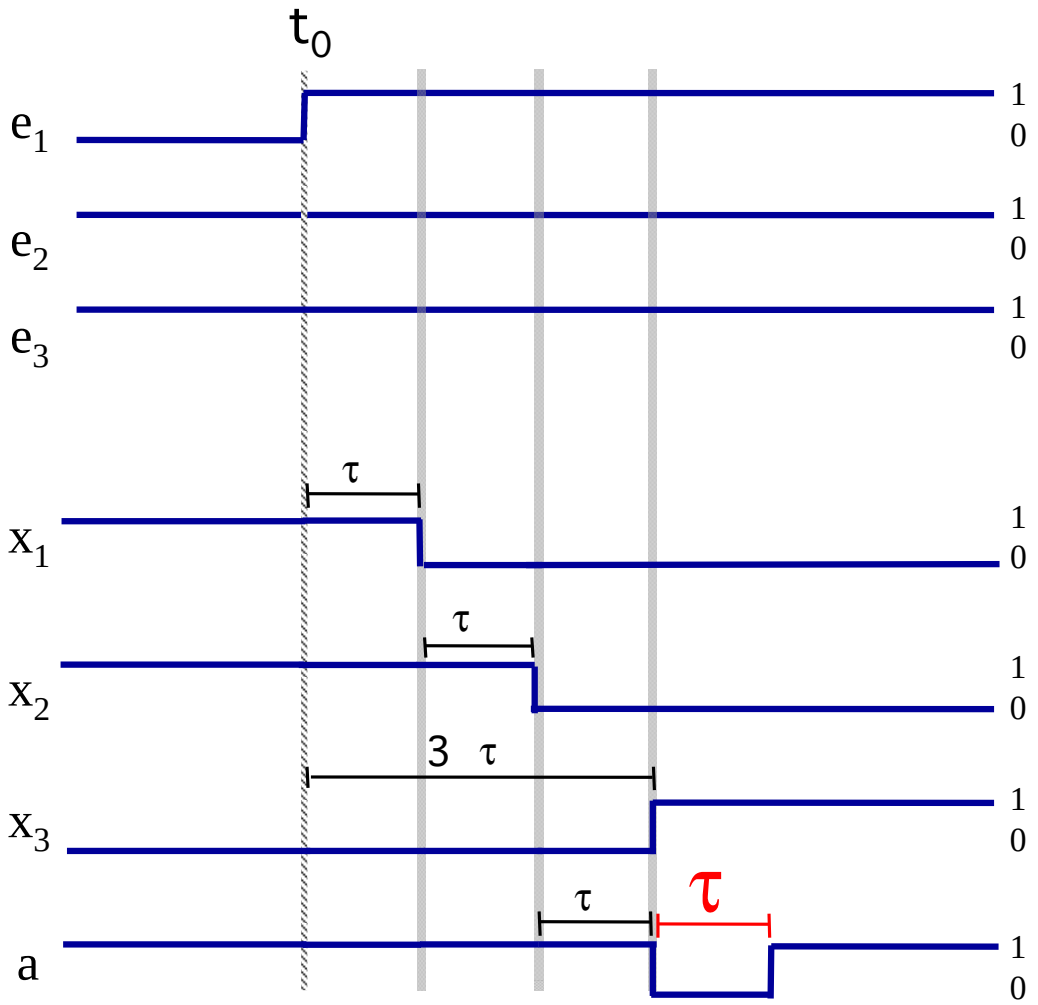
$\Rightarrow$ korrektes Verhalten bei den Übergängen.

Bei beiden Übergängen darf sich der Wert von a nicht ändern.
Er muß **konstant 1** bleiben.

Genau dieses Verhalten kann jedoch nicht garantiert werden !

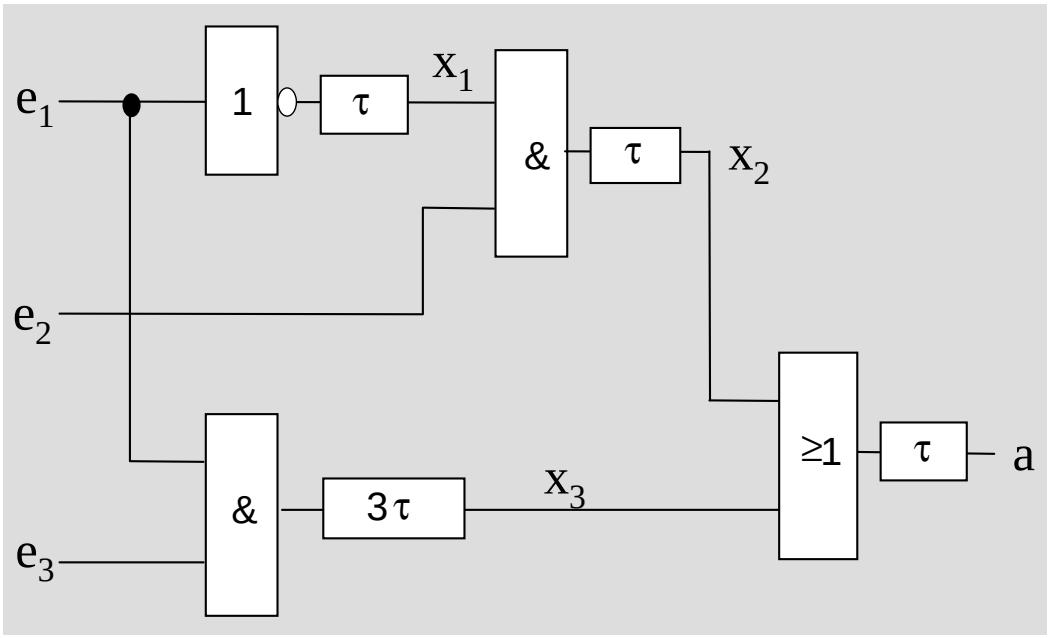
Das Verhalten anhand des Totzeitmodells

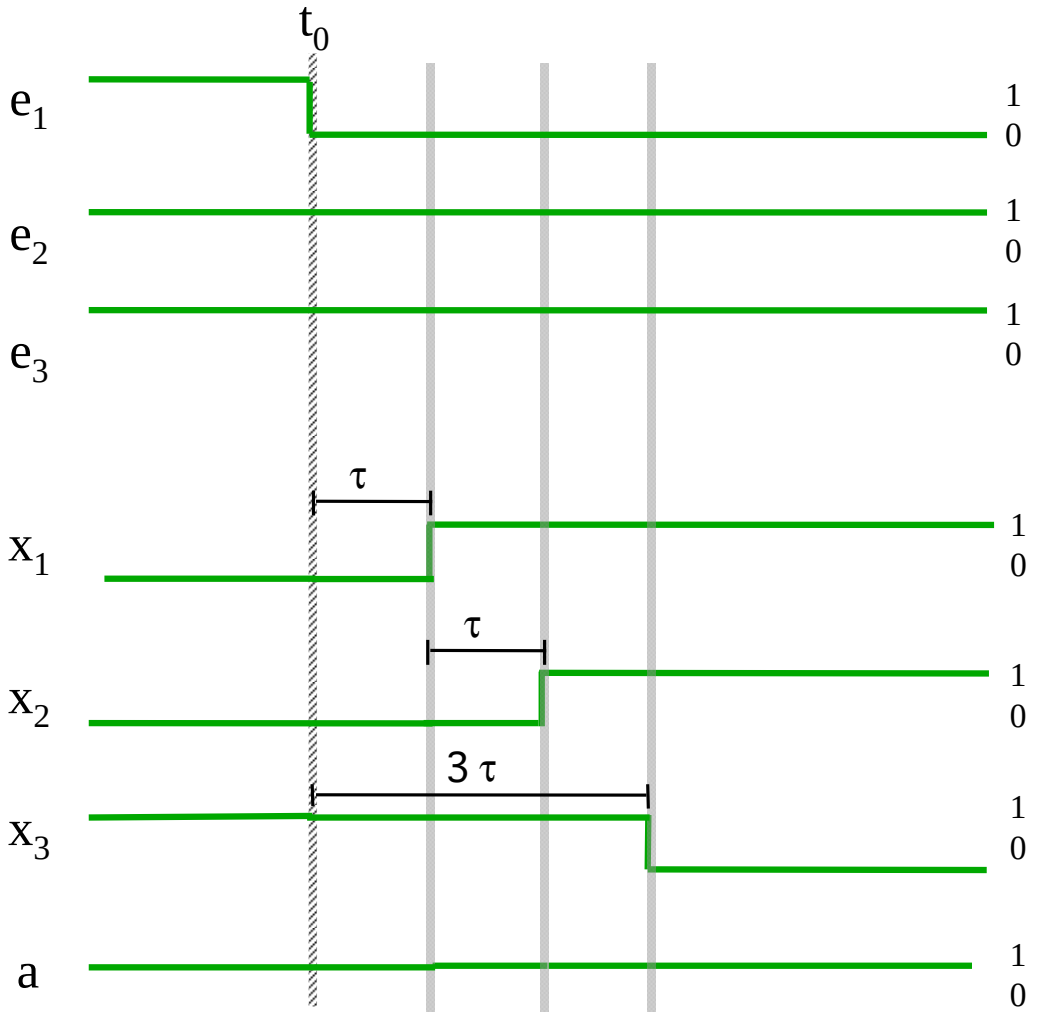




Hasardfehler

Das Verhalten anhand des Totzeitmodells





kein Hasardfehler

Ergebnis

- Beim Wechsel e_1 von 0 auf 1 liefert das Ausgangssignal nicht ständig den korrekten Funktionswert

➔ Hasardfehler

- Beim Wechsel e_1 von 1 auf 0 ist das Ausgangssignal hingegen korrekt

© 2012 Burkhard Stiller

Begriffe: Eingabewechsel, Übergang

- Definition:
  Ein Eingabewechsel ist die Änderung einer oder mehrerer Eingangsvariablen zu einem bestimmten Zeitpunkt.
  - Falls sich mehrere Eingangsvariablen ändern sollen, so müssen sie dies gleichzeitig tun.

- Definition:
  Ein Übergang ist der Vorgang im Schaltnetz, der vom Eingabewechsel ausgelöst wird. Er beginnt mit dem Eingabewechsel und endet mit dem Eintreten des neuen Ruhezustandes.

© 2012 Burkhard Stiller

Begriffe: Hasardfehler - Hasard

- Definition:
  Ein Hasardfehler ist eine mehrmalige Änderung der Ausgangsvariablen während eines Übergangs.

- Definition:
  Ein Hasard ist die durch das Schaltnetz gegebene logisch-strukturelle Vorbedingung für einen Hasardfehler, ohne Berücksichtigung der konkreten Verzögerungswerte.

© 2012 Burkhard Stiller

Hasardbehaftete Übergänge (1)

- Jeder Hasard ist eine Eigenschaft eines bestimmten Überganges im Schaltnetz.

- Zur Betrachtung, ob ein bestimmter Übergang hasardbehaftet ist oder nicht, interessiert nur:
  - Die logische Funktion, die durch das Schaltnetz realisiert wird.
  - Die Struktur des Schaltnetzes, d.h. die Anzahl, die Verknüpfungsfunktionen und die genaue Anordnung der Gatter zur Realisierung der Funktion, nicht jedoch die tatsächlichen Verzögerungswerte der verwendeten Gatter.

© 2012 Burkhard Stiller

Hasardbehaftete Übergänge (2)

- Tritt in einem konkreten Schaltnetz bei einem bestimmten Übergang ein Hasardfehler auf, so ist dieser Übergang hasardbehaftet, also:

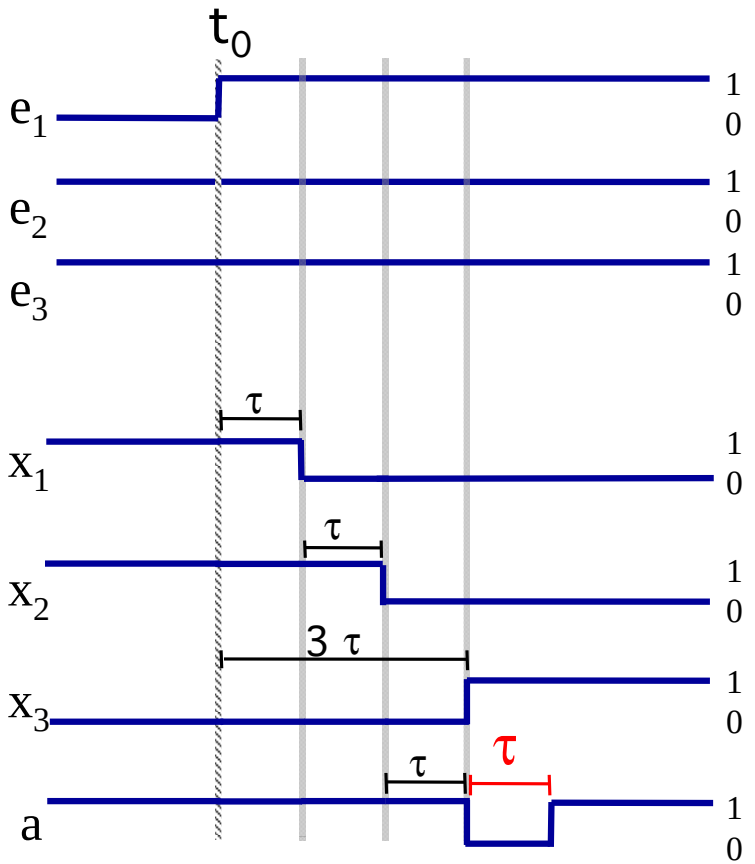
  Hasardfehler $\rightarrow$ Hasard

- Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Ist ein Übergang hasardbehaftet, so folgt hieraus nicht notwendigerweise das Eintreten eines Hasardfehlers.

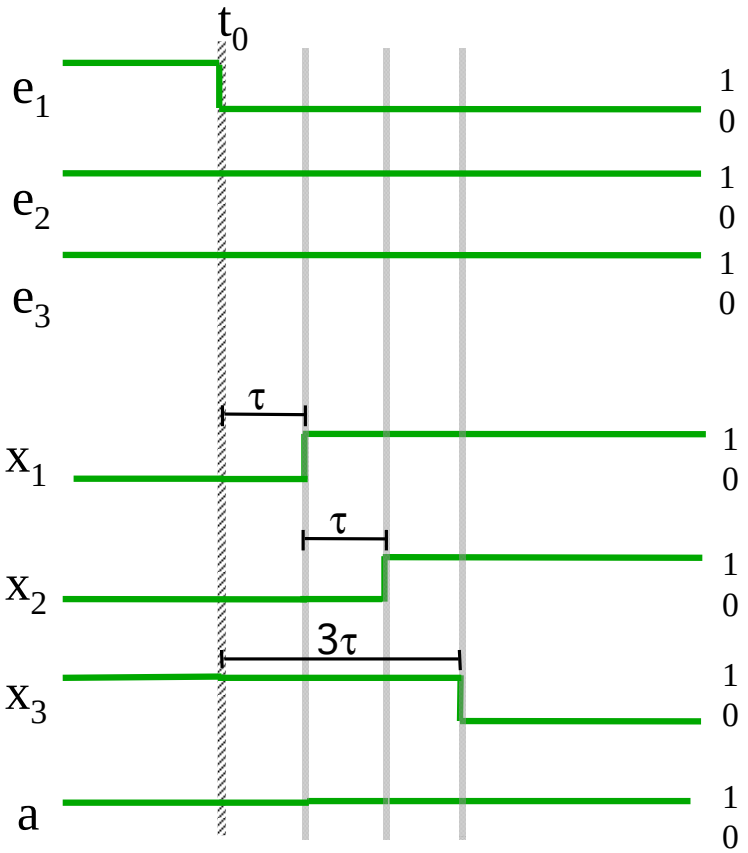
  Hasard $\wedge$ ungünstige Verzögerungswerte $\rightarrow$ Hasardfehler

© 2012 Burkhard Stiller

Beispiel 1



Hasardfehler



kein Hasardfehler

Der Übergang $(e_3,e_2,e_1) : (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$ ist hasardbehaftet, da es die Möglichkeit zu einem Hasardfehler gibt.

© 2012 Burkhard Stiller

Funktionshasard

- Definition:
  Ein Funktionshasard ist ein Hasard, dessen Ursache in der zu realisierenden Funktion liegt.

- Er tritt in jedem möglichen Schaltnetz für diese Funktion auf. Er kann nicht behoben werden.

$\Rightarrow$ Für ein konkretes Schaltnetz mit Funktionshasard kann zwar der Funktionshasardfehler durch günstige Wahl der Verzögerungswerte behoben werden, nicht jedoch der Hasard selbst.

© 2012 Burkhard Stiller

Strukturhasard

- Definition:
  Ein Strukturhasard ist ein Hasard, dessen Ursache in der Struktur des realisierten Schaltnetzes liegt.

- Ein Strukturhasard kann deshalb immer durch Änderung der Schaltnetzstruktur bei gleicher Schaltnetzfunktion behoben werden.

$\Rightarrow$ Es ist grundsätzlich möglich, ein anderes Schaltnetz zu entwerfen, welches dieselbe Funktion realisiert und den Strukturhasard beseitigt.

© 2012 Burkhard Stiller

Statischer 0-Hasard

- Analog zu den Übergängen werden die Hasards als statisch bzw. dynamisch bezeichnet, je nachdem, bei welcher Art von Übergang sie auftreten.

- Ein Hasard in einem statischen 0-Übergang heißt statischer 0-Hasard.

Beispiele für statische 0-Hasardfehler:

Statischer 1-Hasard

- Ein Hasard in einem statischen 1-Übergang heißt statischer 1-Hasard.

- Beispiele für statische 1-Hasardfehler:

Der Übergang (1,1,0) $\rightarrow$ (1,1,1) im Beispiel enthält also einen statischen 1-Hasard.

Dynamischer 01-Hasard

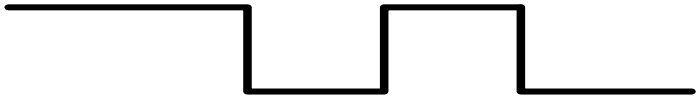
- Ein Hasard in einem dynamischen 01-Übergang heißt dynamischer 01-Hasard.

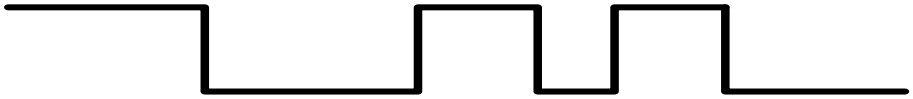
- Beispiele für dynamische 01-Hasardfehler:

Dynamischer 10-Hasard

- Ein Hasard in einem dynamischen 10-Übergang heißt dynamischer 10-Hasard.

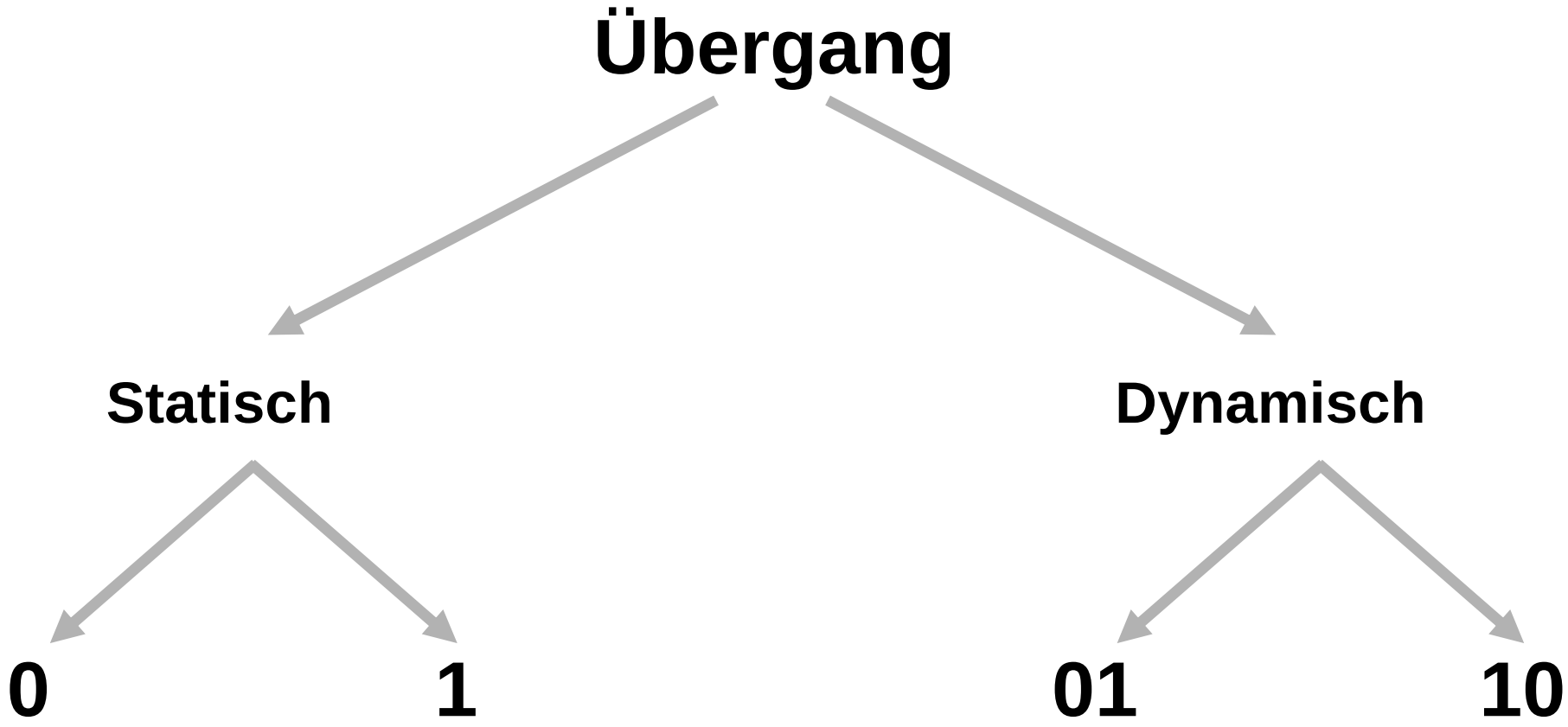
- Beispiele für dynamische 10-Hasardfehler:





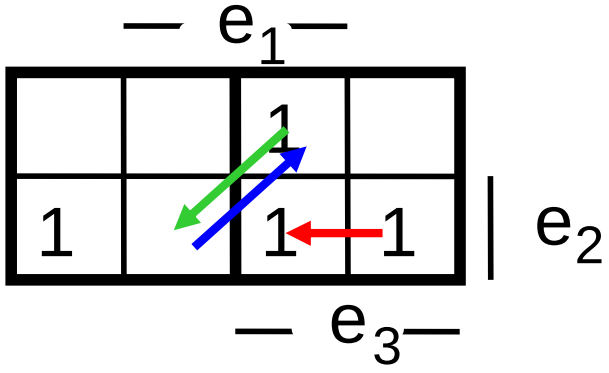
© 2012 Burkhard Stiller

Klassifizierung von Hasards



© 2012 Burkhard Stiller

Übergangsbeispiele



Statischer 1-Übergang:

Übergang (e_3,e_2,e_1): $(1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$

Dynamischer 01-Übergang:

Übergang (e_3,e_2,e_1): $(0,1,1) \rightarrow (1,0,1)$

Dynamischer 10-Übergang

Übergang in umgekehrter Richtung: $(1,0,1) \rightarrow (0,1,1)$

© 2012 Burkhard Stiller